Задача A. Максим и вкладки

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: математика

Ваша задача: вывести $y - x$.

Задача B. Денис и яблоки

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: математика

Ответ зависит от чётности числа. Если число нечётное, то достаточно купить одно яблоко. Иначе нужно купить два яблока — ответ должен быть положительным числом согласно условию задачи.

Задача C. Денис и эликсиры

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: поиск максимального элемента, реализация

Выгодно купить один и тот же эликсир два раза. Найдём максимальное и минимальное числа, а затем узнаем, чей квадрат больше. Например, если максимум равен 2, а минимум равен -3, то выгодно взять -3.

Задача D. Саша и бассейны

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: конструктив, математика

При $n = m = 1$ используем один цвет. Для остальных матриц можно использовать два цвета, и ответ будет равен равен $2 \cdot x$. Один из вариантов подходящей раскраски — шахматное поле:

```
1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2
2 1 2 1 2 1 2 1
1 2 1 2 1 2 1 2
```

Задача E. Саша и биологическое оружие

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: строки, реализация

Заметим, что требуется вывести любой подходящий ответ. Будем брать строку из одной буквы. Так как таких строк всего 26, переберём и выберем такую, которая является префиксом наибольшего количества строк.

Задача F. Антон и красота кода

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: строки

Сначала рассмотрим, как решать задачу медленно. Можно перебирать i от 1 до n, затем перебирать j от 1 до $i-1$, и увеличивать ответ, если $s_j > s_i$.

Заметим, что можно не перебирать j. Давайте перебирать значение s_j. Если $s_j > s_i$, будем прибавлять к ответу количество встреч s_j на префиксе от 1 до $i-1$.

Так как различных букв всего 26, решение будет работать за $O(26 \cdot n)$.

Задача G. Задача для Григория

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: рекурсия

Ответ не существует только для $n = 2$ и $n = 3$.

Давайте напишем перебор всех вариантов при помощи рекурсии. Такое решение в худшем случае будет работать за $O(n!)$ и получит 50 баллов.

Добавим в рекурсию оптимизацию: не заходить в состояние, если там появляются фигуры под боем. Научимся проверять это состояние за $O(1)$.

Для ограничений n из условия время описанного рекурсивного алгоритма не превысит 0.5 секунды.

Задача H. Антон и день рождения

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: математика, бинарный поиск

Пусть x — количество игр. Тогда x должно быть не менее чем $max(a_i)$. Посчитаем, сколько раз может не сыграть какой либо друг Антона, это значение равно $\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)$. Если это значение больше либо равно x, то можно сыграть x игр так чтобы все друзья остались довольны. Бинарным поиском найдём минимальное подходящее значение x.

Стоит отметить, что задачу можно решить без бинарного поиска. Положим, что x равно $max(a_i)$. Проверим условие:

$n \cdot x - \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant x$,

которое сводится к виду:

$(n-1) \cdot x - \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant 0$.

Если условие выполняется, то ответ: x. Иначе заметим, что при увеличении x на единицу значение слева увеличивается на $n-1$. То есть, ответ будет равен:

$x + \lceil -((n-1) \cdot x - \sum_{i=1}^{n} a_i)/(n-1) \rceil$.

Задача I. Григорий и сложные вычисления

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: математика, решето Эратосфена

Введём функцию $p(x)$. Здесь $p(x)$ равно количеству пар индексов i, j $(i < j)$ таких, что НОД(a_i, a_j) нацело делится на x.

Чтобы вычислить значение этой функции, узнаем, сколько чисел делятся на x — cnt_x. Это можно сделать за $O(M \cdot log(M))$. Тогда $p(x) = \frac{cnt_x \cdot (cnt_x - 1)}{2}$.

Значение $p(x)$ также равно $cr(x) + cr(2 \cdot x) + cr(3 \cdot x) + cr(4 \cdot x) + \ldots$. Из $p(x)$ можно получить значение $cr(x)$, отняв $cr(2 \cdot x) + cr(3 \cdot x) + \ldots$. Это можно реализовать, если считать $cr(x)$ с конца, решение будет похоже на решето Эратосфена и будет работать за $O(M \cdot log(M))$.

Итоговая асимптотика решения: $O(M \cdot log(M))$.

Задача J. Егор, гора и название

Автор задачи: Андрей Мищенко
Разбор: Андрей Мищенко
Теги: строки, префиксное дерево, суффиксный массив

Давайте сведём задачу к работе на суффиксах. Мы можем добавлять суффиксы к некоторым структурам. Будем добавлять суффиксы по порядку.

Когда добавляется некоторый суффикс, к ответу прибавляется его длина. При этом надо отнять наибольший общий префикс с некоторым суффиксом, который уже был добавлен, чтобы избавиться от повторяющихся строк. Это можно делать за $O(n^2)$ с помощью префиксного дерева.

Заметим, что неважно в каком порядке мы будем добавлять суффиксы. Добавим суффиксы в лексикографическом порядке. Отсортируем суффиксы при помощи суффиксного массива. При добавлении нового суффикса наибольший общий префикс будет достигаться с последним добавленным суффиксом заранее, так как суффиксы добавляются в лексикографическом порядке.

Ответ будет равен $\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} LCP(suf_{p_i}, suf_{p_{i+1}})$.

О поиске LCP можно прочитать здесь http://www.e-maxx-ru.1gb.ru/algo/suffix_array#6.

Итоговая асимптотика решения: $O(n \cdot log(n))$.