

Учебное моделирование как методическая основа УМК по математике для 1–4 классов: виды моделей и заданий

Наша концепция

- ▶ В учебно–методическом комплексе реализована *концепция начального обучения математике с использованием учебного моделирования.*
- ▶ В соответствии с данной концепцией в процессе изучения математике используются *учебные модели* различных видов.

Почему актуально?

Международные исследования качества образовательных достижений учащихся

TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) – международное мониторинговое исследование качества школьного математического и естественнонаучного образования (4, 8, 11 классы)

PISA (*Programme for International Student Assessment*) – международная программа по оценке образовательных достижений учащихся в области математики, чтения, естествознания (15–летние учащиеся)

PIRLS (*Progress in International Reading Literacy Study*) – международное исследование качества чтения и понимания текста (4 класс)

В этих международных исследованиях используются задания, позволяющие проверить способность учащихся применять знания и умения в различных жизненных ситуациях.

Пример задания: TIMSS–2015, Россия

У Сони есть 12 кусочков проволоки, 40 круглых бусин и 48 плоских бусин.

Она использует 1 кусок проволоки, 10 круглых бусин и 8 плоских бусин, чтобы сделать 1 браслет.

Если Соня будет делать одинаковые браслеты, то сколько браслетов она сможет изготовить?

A – 40

B – 12

C – 5

D – 4



Источник: <http://www.centeroko.ru/timss15>

Пример задания: TIMSS–2015, Россия

У Сони есть 12 кусочков проволоки, 40 круглых бусин и 48 плоских бусин.

Она использует 1 кусок проволоки, 10 круглых бусин и 8 плоских бусин, чтобы сделать 1 браслет.

Если Соня будет делать одинаковые браслеты, то сколько браслетов она сможет изготовить?

A – 40

B – 12

C – 5

D – 4



Источник: <http://www.centeroko.ru/timss15>

Кто в лидерах? TIMSS-2015, 4 класс, математика

TIMSS
2015



5 стран ▲

2 страны (=)

42 страны ▼

Страна	Средний балл	
1. Сингапур	618 (3,8)	○
2. Гонконг	615 (2,9)	○
3. Республика Корея	608 (2,2)	○
4. Тайвань	597 (1,9)	○
5. Япония	593 (2,0)	○
7. Российская Федерация	564 (3,4)	=
8. Норвегия	549 (2,5)	▼
9. Ирландия	547 (2,1)	▼
10. Англия	546 (2,8)	▼
11. Бельгия (фл.)	546 (2,1)	▼
12. Казахстан	544 (4,5)	▼
13. Португалия	541 (2,2)	▼
14. США	539 (2,3)	▼
15. Дания	539 (2,7)	▼
16. Литва	535 (2,5)	▼
17. Финляндия	535 (2,0)	▼
18. Польша	535 (2,1)	▼
19. Нидерланды	530 (1,7)	▼
20. Венгрия	529 (3,2)	▼
21. Чешская Республика	528 (2,2)	▼
22. Болгария	524 (5,3)	▼
23. Кипр	523 (2,7)	▼
24. Германия	522 (2,0)	▼
25. Словения	520 (1,9)	▼
26. Швеция	519 (2,8)	▼
27. Сербия	518 (3,5)	▼
28. Австралия	517 (3,1)	▼
29. Канада	511 (2,3)	▼
30. Италия	507 (2,6)	▼
31. Испания	505 (2,5)	▼
32. Хорватия	502 (1,8)	▼
Среднее значение шкалы TIMSS	500	
33. Словацкая Республика	498 (2,5)	▼
34. Новая Зеландия	491 (2,3)	▼
35. Франция	488 (2,9)	▼
36. Турция	483 (3,1)	▼
37. Грузия	463 (3,6)	▼
38. Чили	459 (2,4)	▼
39. ОАЭ	452 (2,4)	▼
40. Бахрейн	451 (1,6)	▼
41. Катар	439 (3,4)	▼
42. Иран	431 (3,2)	▼
43. Оман	425 (2,5)	▼
44. Индонезия	397 (3,7)	▼
45. Иордания	388 (3,1)	▼
46. Саудовская Аравия	383 (4,1)	▼
47. Марокко	377 (3,4)	▼
48. Южная Африка	376 (3,5)	▼
49. Кувейт	353 (4,6)	▼

Источник: <http://www.centeroko.ru/timss15>

Кто в лидерах? TIMSS–2019, 4 класс, математика

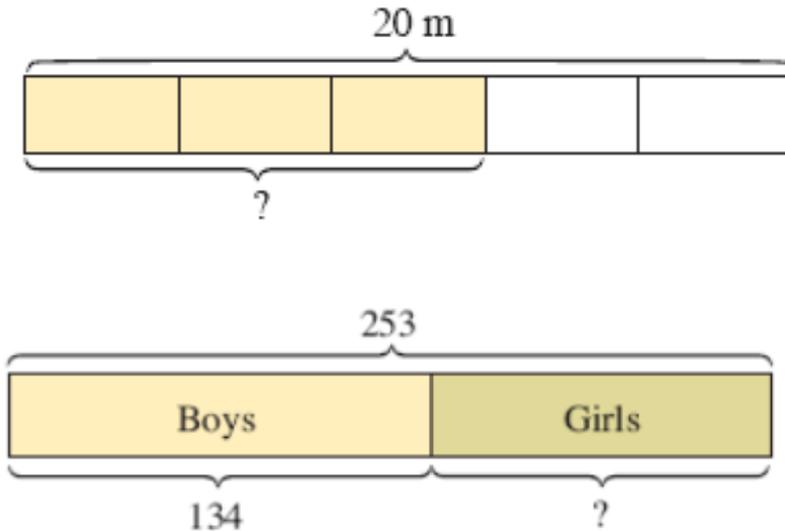
Singapore	625
Hong Kong SAR	602
Korea, Rep. of	600
Chinese Taipei	599
Japan	593
Russian Federation	567
Northern Ireland	566
England	556
Ireland	548
Latvia	546
Norway (5)	543

Источник: <https://timss2019.org/reports/average-achievement-math-m4>

Сингапур: модельный метод обучения

Грамотно сконструированная серия **схематических моделей** в современной научно-методической школе Сингапура признается «ядром» модельного метода обучения («*model method*»)

Математика в Сингапуре: «полосовое моделирование» (*bar-modelling*)



Рисунки и модели

Рисунки, которые **не являются моделями**, служат для *визуального сопровождения* учебного математического материала и выполняют следующие функции:

- ▶ иллюстрирование нематематических понятий и явлений, о которых идет речь в учебных заданиях;
- ▶ реализация межпредметных связей;
- ▶ расширение кругозора и усиление гуманитарной направленности математической подготовки учащихся;
- ▶ мотивация учащихся к изучению математики визуально привлекательными средствами, сопровождающими текст учебного задания

Примеры рисунков (не моделей)

5. В 2010 г. праздновали 200 лет со дня рождения известного белорусского художника Ивана Хруцкого. В каком году и в каком веке родился Иван Хруцкий?



6. Художник Иван Хруцкий написал картину «Портрет жены с цветами и фруктами» в возрасте 28 лет. В каком году и в каком веке он написал эту картину?



Коложская церковь в городе Гродно была построена в 12 в. Определи приблизительный возраст этой церкви в веках. Вычисли площадь пола этой церкви, если он имеет форму прямоугольника с длинами сторон, равными 22 м и 13 м.



Алесь и Яна планируют участвовать в сплаве на байдарках по Исlochи. Им нужно разработать маршрут не более чем на 4 дня, из которых один день должен быть днём отдыха. Какая информация может понадобиться для составления маршрута?



Первая железная дорога в Беларуси была проложена от Гродно до Поречья в 1862 г. Её длина была 32 км. В каком веке была проложена эта дорога? Сколько лет прошло с этого события до текущего года?



Чтобы расплатиться за покупки, используют не только монеты и купюры, но и специальные банковские карточки.



Какой рисунок будет моделью?

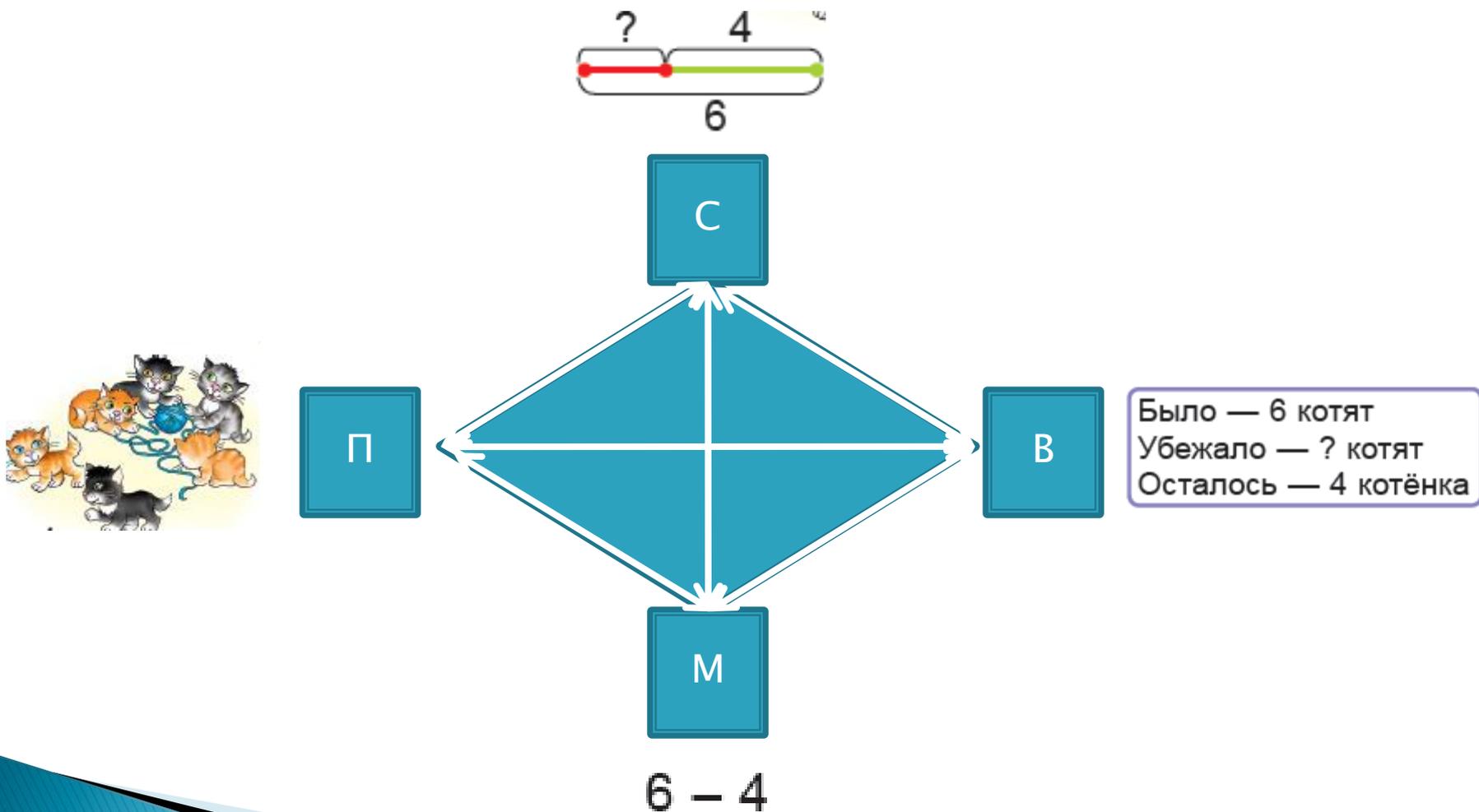
- ▶ Модель отображает **существенные** характеристики в изучаемом материале.
- ▶ Значит, на рисунке, который является предметной моделью, должны быть показаны **существенные для математики** характеристики (количество элементов, связи между ними).

Виды учебных моделей

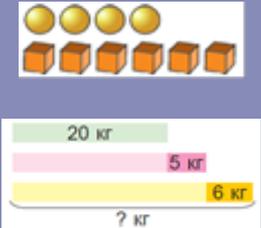
При изучении математики используются различные **модели** реальных ситуаций – *предметные, схематические, вербальные, математические.*

Суть моделирования как предметного и общеучебного умения – это ПЕРЕХОД от модели одного вида к модели другого вида.

Учебное моделирование как «переход»



По средствам репрезентации:

Визуальные	Вербальные	Математические
<p>Предметные: средствами построения являются реальные предметы или их изображения</p> <p>Схематические: средствами построения являются геометрические фигуры</p> 	<p>Учебные модели, построенные на естественном языке</p> <div data-bbox="743 949 1178 1120" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><p>Было — 6 котят. Убежало — ? Осталось — 4 котёнка.</p></div>	<p>Учебные модели, построенные с помощью математической символики</p> <div data-bbox="1439 856 1671 1063" style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$5 + 1 = 6$$5 < 6$$6 > 1$</div> <div data-bbox="1439 1135 1671 1199" style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$y : 23 = 4$</div>

Предметные модели

Як різними способами вилічыць, колькі ўсяго птушак на малюнку?



$$\frac{(5 + 3) + 4}{8 + 4} = ?$$

$$8 + 4 = 12$$

$$\frac{5 + (3 + 4)}{5 + 7} = ?$$

$$5 + 7 = 12$$

Спалучальная ўласцівасць складання

Пры складанні можна два суседнія складаемыя замяніць іх сумай.

$$5 + 3 + 4$$

$$(5 + 3) + 4$$

$$5 + (3 + 4)$$

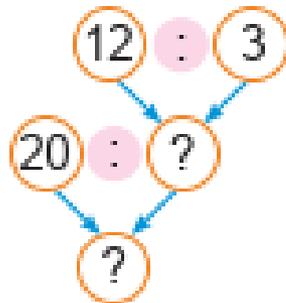
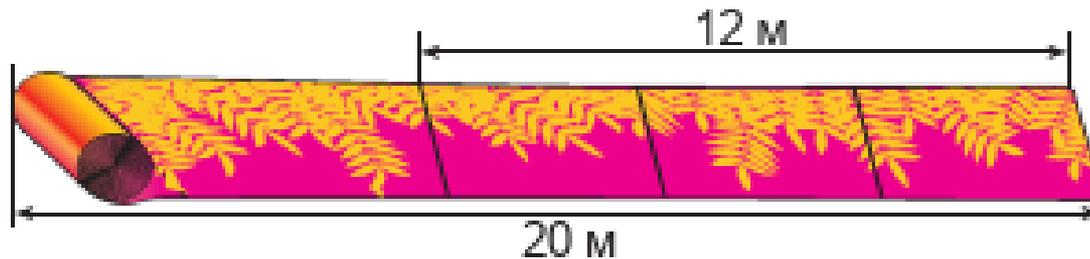
Предметные модели



На полке 3 куклы, а машинок на 2 больше.
Сколько машинок на полке?

Предметные модели

На 3 сукенкі пайшло 12 м тканіны, пароўну на кожную.
Колькі такіх сукенак можна пашыць з 20 м тканіны?



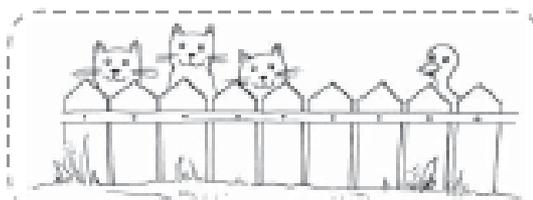
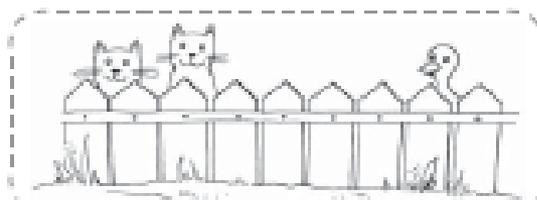
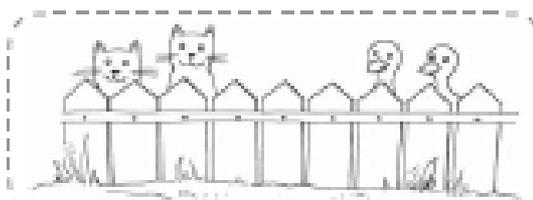
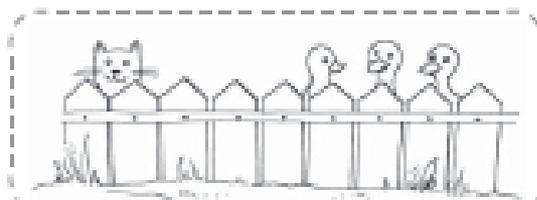
- Спачатку даведаюся, колькі метраў тканіны пайшло на адну сукенку.
- Потым даведаюся, колькі сукенак можна пашыць з 20 м тканіны.



Предметные модели

1 Выбери и обведи по контуру рисунок, который подходит к задаче. Ответ на вопросы.

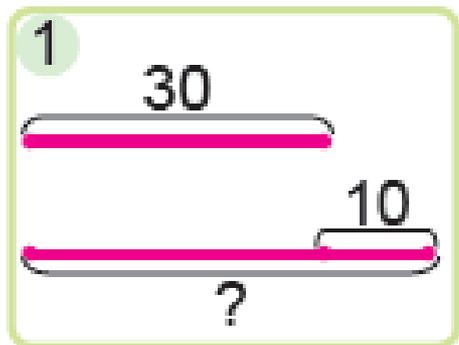
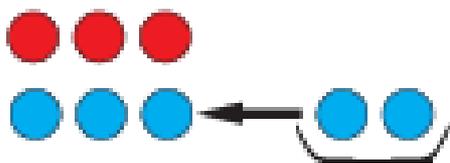
Во дворе котята и утята. Всего 4 головы и 10 ног. Сколько котят? Сколько утят?



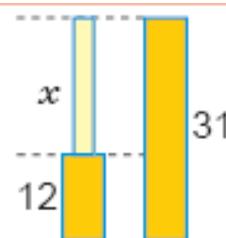
Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

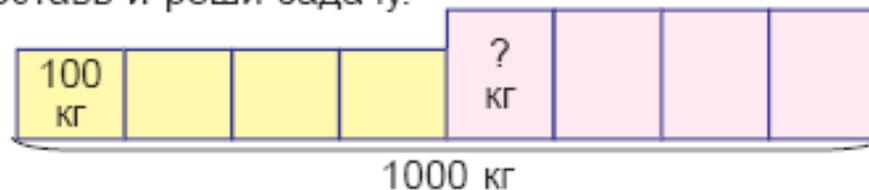
Схематические модели



$$\begin{aligned} 12 + x &= 31 \\ x &= 31 - 12 \\ \underline{x &= 19} \\ 12 + 19 &= 31 \\ 31 &= 31 \end{aligned}$$



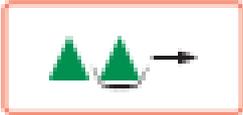
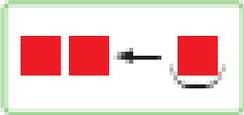
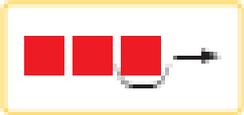
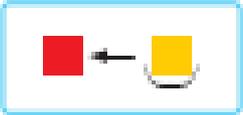
2. Составь и реши задачу.



Схематические модели, 1 класс

Линия вычислений

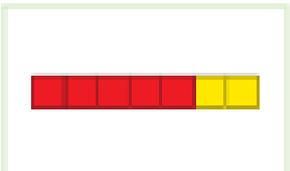
9.

			
$? - ? = ?$		$? + ? = ?$	

Линия задач

 Урок 36

1. Мама вышила 5  і 2 . Кількі ўсяго цюльпанаў на вышыўцы?

Малюнак	Схема	Рашэнне
		$? + ? = ?$

Схемы, 1 класс

Схемы с поэлементным соответствием

4. **Урок 14**






 $?\ + \ ? = ?$



 $?\ - \ ? = ?$

12.



 $3 - 2$



 $1 + 2$



 $2 + 1$



 $3 - 1$

5.









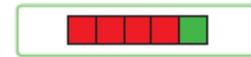
Урок 39

4. Выбери схемы. Реши задачи.

Было 4 

Купили ещё 2 

Сколько  стало?




Было 6 

Отдали 2 

Сколько  осталось?




Схемы, 1 класс

Схемы с поэлементным и структурным соответствием

 Урок 73

Было 3 куклы, а машинок на 2 больше.
Сколько было машинок?



$3 + 2 = 5$

Машинок столько же, сколько кукол,
и ещё 2.



Значит, для решения задачи нужно
к 3 прибавить 2.

1. Выбери схему. Реши задачу.
Паша построил башню из кубиков.
Он взял 12 , а  — на 2 больше.
Сколько  кубиков взял Паша?

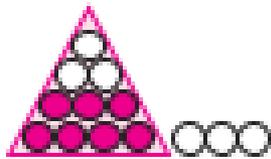


Схематические модели, 2 класс



Урок 19

Растлумач вылічэнні.



$$7 + 6 = ?$$



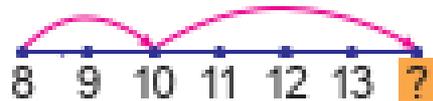
$$6 + 7 = ?$$

$$13 - 6 = ?$$



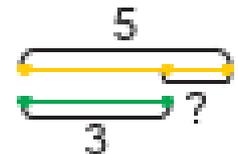
$$13 - 7 = ?$$

1. Састаў і рашы прыклады.



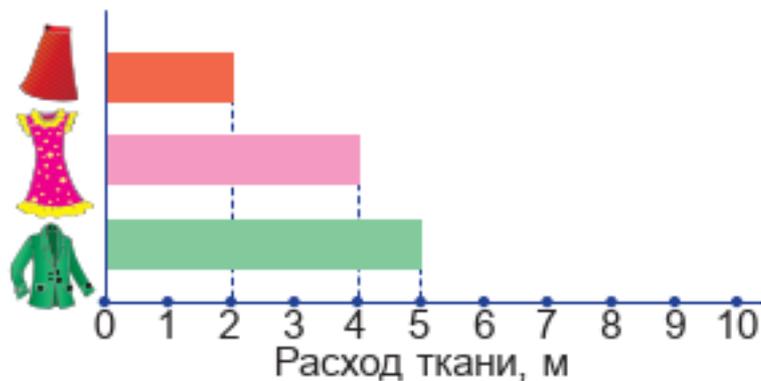
. Пасадзілі 5 сосен і 3 елкі. На колькі менш пасадзілі елак, чым сосен?

Сосен — 5
Елак — 3 } на ? менш

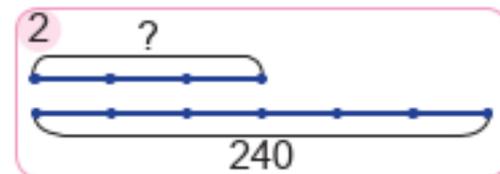
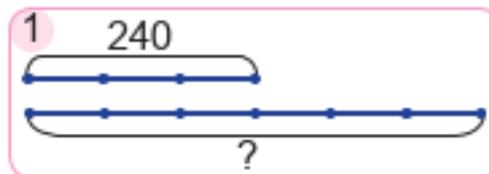


Схематические модели, 4 класс

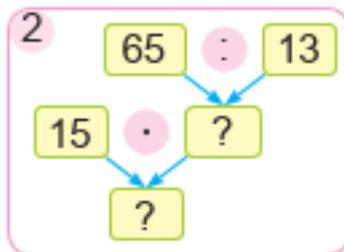
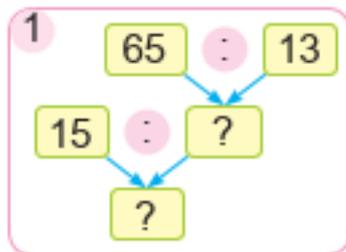
Для пошива платья нужно ? м ткани, а для пошива юбки — ? м. Сшили 12 платьев. Платьев сшили в 2 раза больше, чем юбок. Сколько метров ткани израсходовали на все платья и юбки?



6. Выбери схему. Реши задачу.
За 3 одинаковых стула заплатили 240 р. Какова стоимость шести таких стульев?



8. Выбери схему. Реши задачу.
Несколько маршрутных такси перевезли 65 пассажиров, по 13 пассажиров в каждом такси. Сколько пассажиров можно перевезти, если в каждом из этих такси разместить по 15 пассажиров?



Вербальные модели

Сосен — 5
Елак — 3 } на ? больш

1. Купілі аднолькавую колькасць кніг і альбомаў. Цана кожнай кнігі — 5 р., а кожнага альбома — 9 р. За ўсе кнігі заплацілі 55 р. Які кошт усіх альбомаў?

Цана (р.)	Колькасць (шт.)	Кошт (р.)
5	аднолькавая	55
9		?

1. Множу 1 адзінку на 3, атрымліваю 3 адзінкі. Пішу 3 пад адзінкамі.
2. Множу 2 дзясяткі на 3, атрымліваю 6 дзясяткаў. Пішу 6 пад дзясяткамі.
3. Множу 3 сотні на 3, атрымліваю 9 соцень. Пішу 9 пад сотнямі.
4. Чытаю адказ — 963.



Математические модели

- 4 Выбери и обведи по контуру выражение, с помощью которого можно получить ответ на каждый вопрос задачи.

Один тайм игры в футбол длится a мин. В игре два тайма. Футболисты уже провели на поле пятую часть времени игры.

- Сколько минут футболисты провели на поле?

$a : 5 + a : 5$ $a \cdot 2 : 5$ $a - 2 - a \cdot 2 : 5$ $a - 2 : 5 - a \cdot 2$

- Сколько времени осталось играть футболистам?

$a : 5 + a : 5$ $a \cdot 2 : 5$ $a - 2 - a \cdot 2 : 5$ $a - 2 : 5 - a \cdot 2$

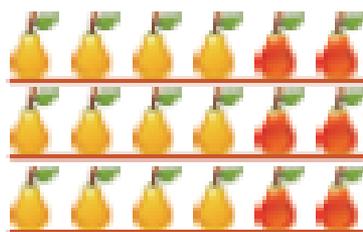
Математические модели

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$894 : y = 6$$

$$8 + 7 + 5$$

Сколько всего груш? Рассмотрим разные способы вычислений.



Способ 1

Сколько груш в одном ряду?

$$4 + 2$$

Сколько всего груш?

$$(4 + 2) \cdot 3$$

Способ 2

Сколько жёлтых груш?

$$4 \cdot 3$$

Сколько красных груш?

$$2 \cdot 3$$

Сколько всего груш?

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

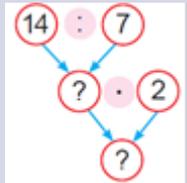
$$(4 + 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

Распределительное свойство умножения

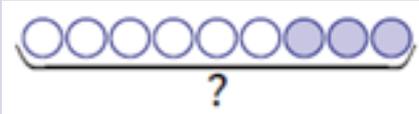
Чтобы умножить сумму на число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

По виду моделируемого объекта

По виду моделируемого объекта	
Содержательные	Процессуальные
Фиксируют существенные характеристики содержания задачи: количественные данные и структуру отношений	Отражают ход рассуждения при выполнении учебного задания
	

По способу работы с моделью

По способу работы с моделью	
Статические	Динамические
Учебные модели, с которыми учащимся невозможно или затруднительно выполнять практические действия	Учебные модели, с которыми учащиеся могут выполнять практические действия
	

Виды заданий для обучения умению моделировать

- ▶ Соотнесение моделей
- ▶ Выбор модели
- ▶ Дополнение модели
- ▶ Построение модели
- ▶ Преобразование модели

Соотнесение моделей

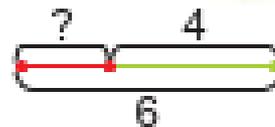


Урок 43

Было 6 кацянят. Некалькі кацянят
уцякло. Засталося 4 кацяняці.
Колькі кацянят уцякло?



Было — 6 кацянят.
Уцякло — ?
Засталося — 4 кацяняці.

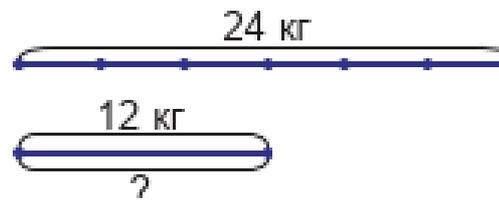


Соотнесение моделей

1. У 6 пакетаў расфасавалі 24 кг мукі, пароўну ў кожны пакет. Колькі такіх пакетаў трэба, каб расфасаваць 12 кг мукі?

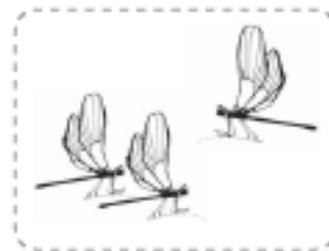
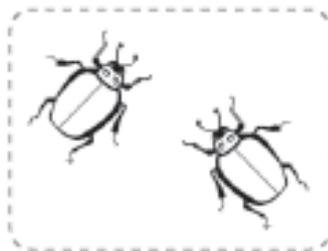
Маса пакета (кг)	Колькасць пакетаў (шт.)	Маса ўсіх пакетаў (кг)
аднолькавая	6	24
	?	12

- Што даведаемся спачатку?
- Што даведаемся потым?



Выбор моделей

2 Выбери и обведи по контуру рисунок, который подходит к записи $1 + 1 = 2$. Измени остальные рисунки так, чтобы они тоже подходили к этой записи.



$$1 + 1 = 2$$

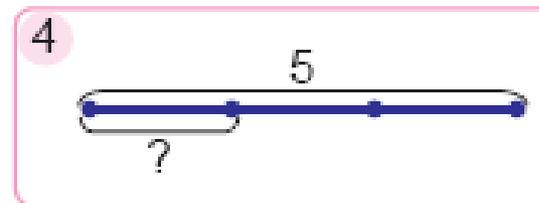
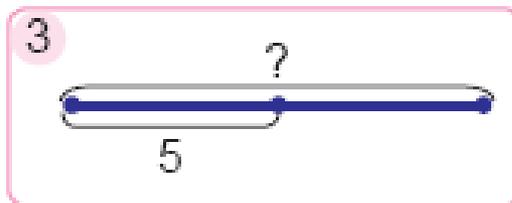
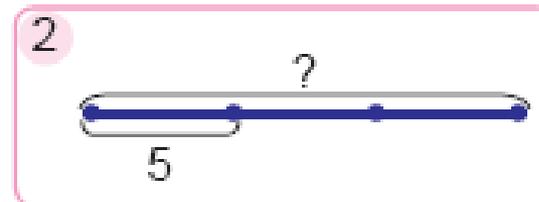
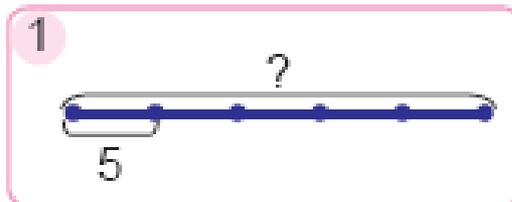


12

Выбор моделей

2. Выбери схему. Реши задачу.

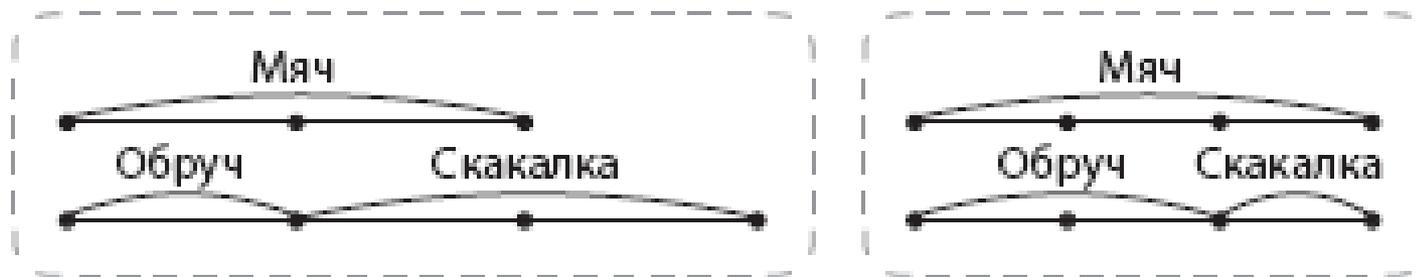
В корзине 5 боровиков. Это $\frac{1}{3}$ часть всех грибов в корзине. Сколько всего грибов в корзине?



Выбор моделей

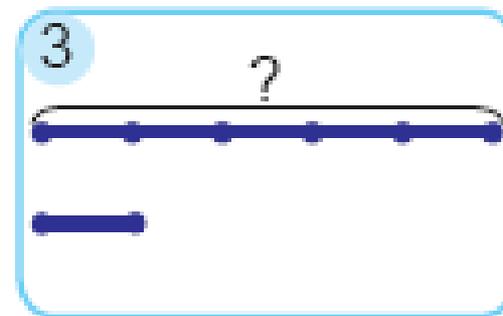
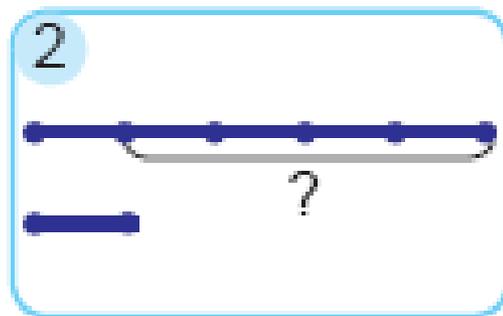
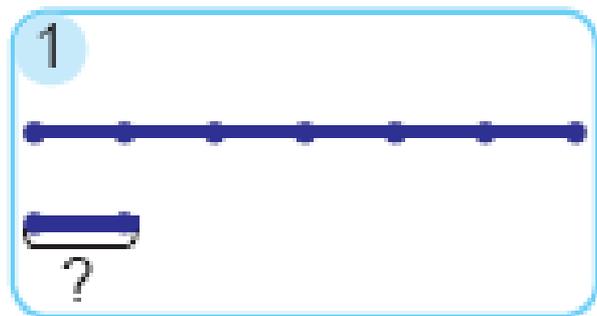
- 4 Прочитай задачу. Выбери и обведи по контуру верную схему. Реши задачу.

Мяч стоит столько же, сколько обруч и скакалка вместе. Во сколько раз обруч дороже скакалки, если скакалка дешевле мяча в 3 раза?



Выбор моделей

5. Выбери схему. Реши задачу.
Папе 35 лет. Папа в 5 раз старше сына. На сколько лет папа старше сына?



Выбор моделей

1 Прочитай задачу. Выбери и обведи по контуру верное решение. Вычисли.

В семье три брата. У каждого брата есть сестра. Сколько детей в семье?

$$3 + 3 = \square \text{ (д.)}$$

$$3 + 1 = \square \text{ (д.)}$$

$$3 + 1 + 1 + 1 = \square \text{ (д.)}$$



Дополнение моделей

3 Прочитай задачу. Дополни схему. Реши задачу.



Для выращивания рассады используют специальные торфяные горшочки. Для изготовления такого горшочка нужно взять 7 одинаковых частей земли и 2 такие же по массе части торфа. Сколько килограммов торфа израсходовали на изготовление партии горшочков, если земли взяли 14 кг?

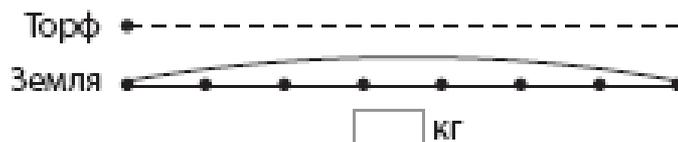


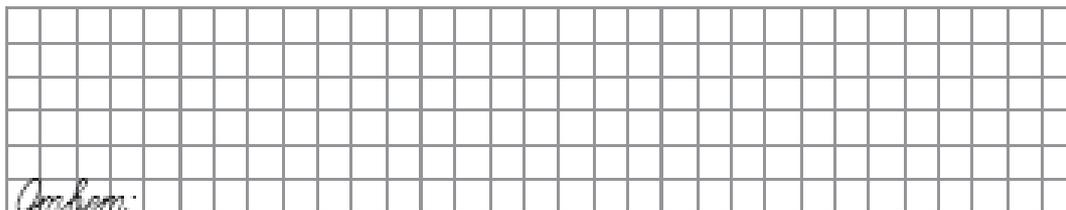
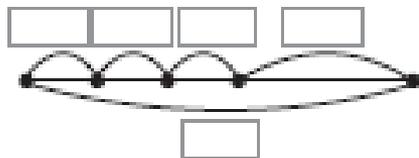
Схема: 

Схема: *Схема:*

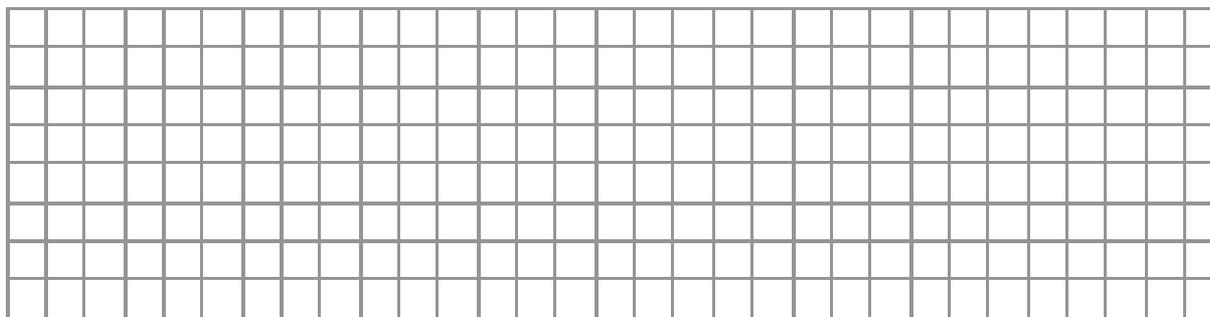
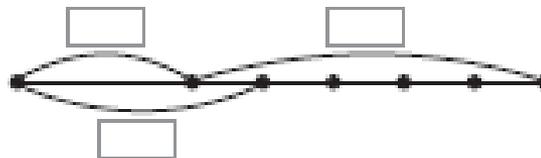
Дополнение моделей

2 Дополни схемы по уравнениям.

$$920 - x \cdot 3 = 363$$



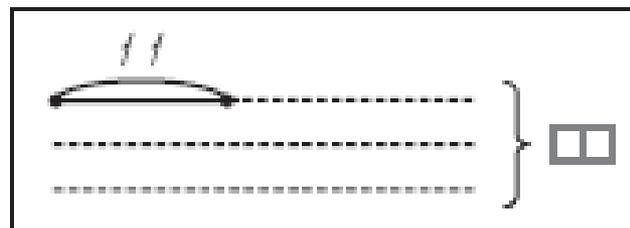
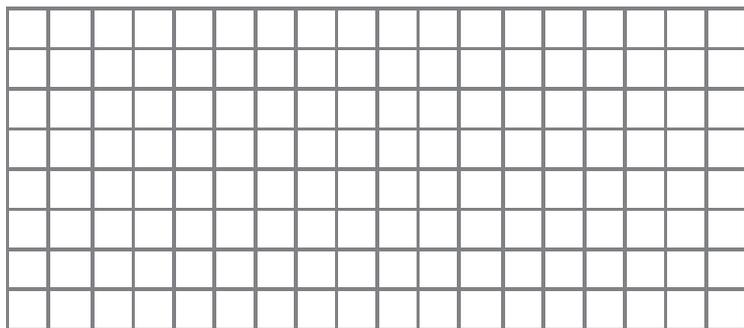
$$650 + x : 5 = 780$$



Дополнение моделей

3. Прочитай задачу. Дополни числами схему. Реши задачу.

Испекли 58 булочек с вареньем, корицей и изюмом. Сколько испекли булочек с вареньем, если булочек с корицей было 11, а булочек с изюмом — 15?

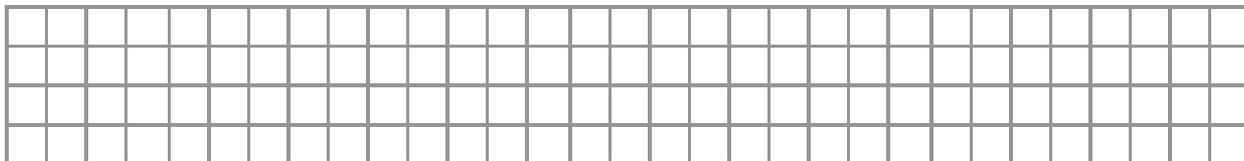


Построение моделей

Построй схему к условию задачи — на-
черти три отрезка, которые покажут,
на сколько метров забора больше, чем
я, покрасил Витя и на сколько метров
забора меньше, чем я, покрасил Тима.



Совет
Сергей



Тима покрасил на 9 м забора меньше, чем Сергей,
а Витя — на 6 м больше, чем Сергей. Кто покрасил больше
метров забора — Тима или Витя? На сколько метров больше?

4 Реши задачу.

Преобразование моделей: практикум

Построй схему и реши задачу.

*Привезли апельсины и мандарины, всего 260 кг фруктов. Каждый вид фруктов был упакован в 5 одинаковых ящиков. Каждый ящик с апельсинами был на 2 кг тяжелее ящика с мандаринами. **Определи массу ящика с апельсинами и ящика с мандаринами.***

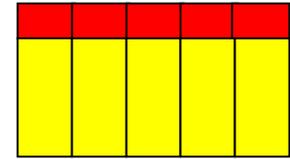
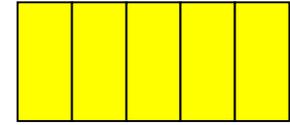
1



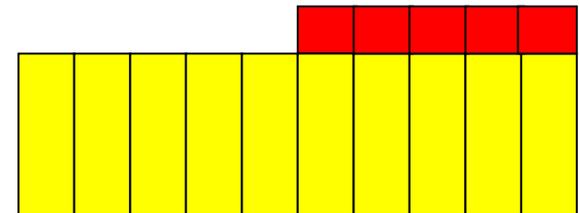
2



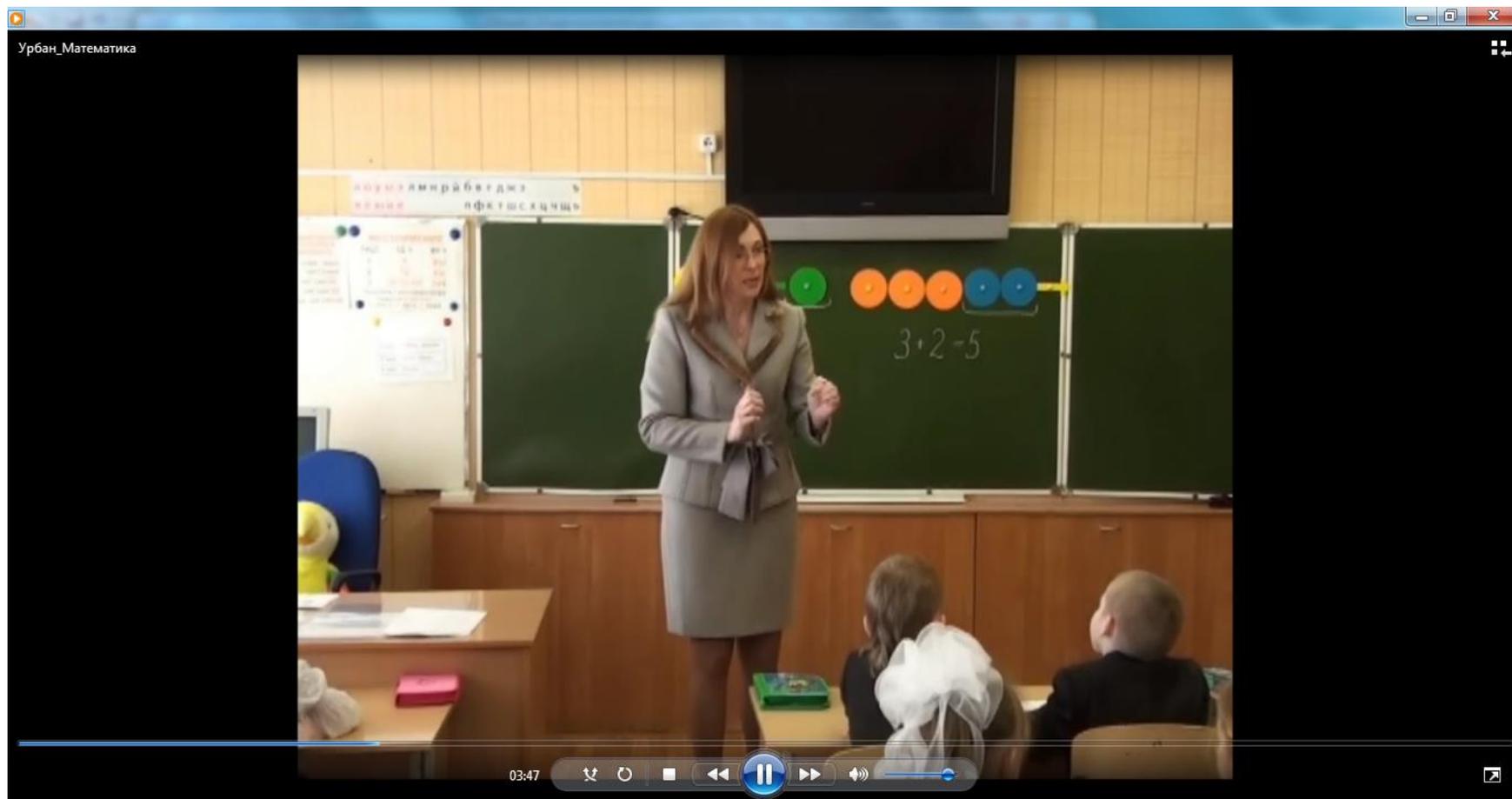
3



4



Использование в 1 классе





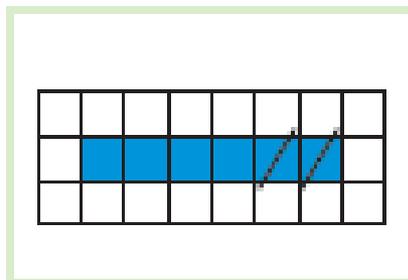
Урок 35

1. Было 6 шаров. Улетело 2 шара. Сколько шаров осталось?

Рисунок



Схема



Решение

$$? - ? = ?$$

Схемы, 1 класс

Схемы со структурным соответствием

 Урок 73

Было 3 куклы, а машинок на 2 больше.
Сколько было машинок?



$3 + 2 = 5$

Машинок столько же, сколько кукол,
и ещё 2.



Значит, для решения задачи нужно
к 3 прибавить 2.

1. Выбери схему. Реши задачу.
Паша построил башню из кубиков.
Он взял 12 , а  — на 2 больше.
Сколько  кубиков взял Паша?



Часто задаваемые вопросы

Журнал «Пачатковая школа», 2021. № 2

Статья М.А.Урбан:

Виды учебных моделей

Часто задаваемые вопросы

В ходе бесед с учителями начальных классов авторы учебного пособия отвечали на большое количество вопросов. Некоторые из них повторялись чаще других. В данной статье предлагаются на них ответы.

1. Как определить вид модели, если она может относиться к различным группам одновременно?

2. Почему мы называем схему к задаче визуальной моделью, если при ее создании используются также слова и числа, то есть элементы вербальных и математических моделей? Может, все учебные модели являются комбинированными?

3. Мне больше нравится термин “наглядная модель”, а не “визуальная модель”. Можно ли его использовать?

4. Можно ли на уроке использовать слово “модель” для обозначения схем к задачам или иллюстраций разрядного состава чисел на абакe?

5. Почему в пособии не используется слово “чертеж” для обозначения визуальной модели текста задачи, а используется слово “схема”?

6. Как лучше на уроке называть модель числа, выполненную на абаке?

7. Если учащиеся могут сразу записать решение задачи, нужно ли требовать от них построения схемы к этой задаче?

8. Если при выполнении контрольной работы учащийся записал решение задачи верно, но не построил к задаче схему, следует ли это считать ошибкой?