Т.И. Развина, К.А. Петров

Законы сохранения в механике

Анализ результатов централизованного тестирования показывает, что наиболее сложными для учащихся являются задачи, относящиеся к теме «Законы сохранения в физике». Хотя одним из самых важных и наиболее универсальных методов решения задач в физике является метод применения законов сохранения, который успешно используется как в классической, так и в квантовой физике, любая задача в механике может быть решена с помощью динамико-кинематического метода и далеко не все задачи решаются с использованием законов сохранения, тем не менее, применение к сложным системам законов сохранения приводит к более быстрому и рациональному решению задачи, чем применение динамико-кинематического метода. Не противопоставляя эти методы друг другу, а разумно сочетая, можно решать разнообразные физические задачи.

В классической физике используются законы сохранения импульса, энергии (в частности закон сохранения энергии в механике), момента импульса и сохранения электрического заряда. Все законы сохранения объединены тем, что при определенных условиях какая либо физическая величина остается постоянной (неизменной). При этом конечный результат можно получить, не рассматривая подробности физического процесса (явления). Достаточно знать характеристики состояний системы до и после их взаимодействия.

При решении задач по теме «законы сохранения в механике» будем оперировать следующими понятиями, параметрами и законами:

-механическая система или система материальных точек – совокупность материальных точек или твердых тел, рассматриваемых в задаче;

-внешние силы, действующие на систему, состоящую из одной материальной точки. Силы, действующие на механическую систему, состоящую из множества материальных точек, могут быть внутренними и внешними;

-внешние силы изменяют характер движения как целого, внутренние – могут изменить движение отдельных тел системы, но не влияют на движение системы как целого;

-замкнутая (или изолированная) система тел – система, на которую не действуют никакие внешние силы; если в каком–либо направлении на систему не действуют внешние силы, то в этом направлении систему можно считать также замкнутой;

-импульс материальной точки ($\vec{p}$) – векторная физическая величина, равная произведению массы m материальной точки на ее скорость $\vec{\upsilon}$: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$;

-в замкнутой механической системе векторная сумма импульсов, составляющих систему материальных точек, остается неизменной при любых взаимодействиях внутри ее;

-для незамкнутой механической системы изменение импульса $\Delta\vec{p}$ равно импульсу силы ($\vec{F}\Delta t$): $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, или скорость изменения импульса материальной системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему: $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ (второй закон Ньютона в импульсной форме);

- работа (А) силы, скалярная физическая величина, являющаяся мерой изменения энергии системы тел, равная произведению модулей силы $\left|\vec{F}\right|$, перемещения $\left|\Delta\vec{r}\right|$ и косинуса угла между ними: $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cos\alpha$;

- энергия (W) – скалярная физическая величина, характеризующая способность системы тел совершить работу;

- кинетическая энергия ($W_{ê}$) – энергия движущегося тела, равная половине произведения массы тела и квадрата его скорости: $W_{ê} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$;

- теорема об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии системы тел за некоторый промежуток времени равно работе, совершаемой за это время результирующей силой, действующей на систему: $\Delta W_{ê} = W_{ê2} - W_{ê1} = À_{ðåç}$ ($W_{ê1}, W_{ê2}$ – кинетическая энергия системы до и после взаимодействия, $À_{ðåç}$ – работа результирующей силы, действующей на систему тел);

- потенциальная энергия ($W_{ï}$) – энергия взаимодействия тел или частей тела, определяемая их взаимным расположением. Значение потенциальной энергии тела зависит от выбора точки отсчета, в которой энергию полагают равной нулю. Выбор нулевого уровня потенциальной энергии диктуется соображениями удобства при решении конкретной задачи. Ни одно явление природы не зависит от самой потенциальной энергии.

- консервативные (или потенциальные) силы – силы, работа которых не зависит от формы траектории, а по замкнутой траектории равна нулю: силы тяжести и упругости;

- работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии системы, взятому с противоположным знаком: $A = -\Delta W_{ï} = -(W_{ï2} - W_{ï1})$;

- потенциальная энергия тел, взаимодействующих посредством гравитационных сил: $W_{ï} = -G\frac{m_1 m_2}{r}$; $W_{ï} = mgh$ ($h \ll R$).

- потенциальная энергия деформированной пружины: $W_{ï} = \frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{\left\langle F_{óïð}\right\rangle \Delta x}{2} = \frac{\left\langle F_{óïð}\right\rangle^2}{2k}$.

- закон сохранения механической энергии: в замкнутой системе тел, взаимодействующих консервативными силами (тяжести, упругости) полная механическая энергия остается постоянной, равной сумме кинетической и потенциальной энергии тел: $W = W_{ê} + W_{ï} = const$.

- диссипативные (неконсервативные или непотенциальные) силы, силы, работа которых по замкнутой траектории отлична от нуля и зависит от длины траектории (силы трения, сопротивления).

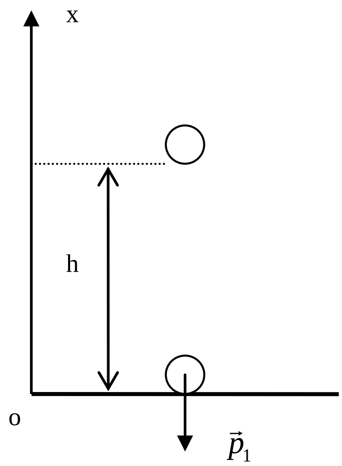
- диссипативные системы – системы тел, в которых полная механическая энергия не остается постоянной, а превращается (полностью или частично) во внутреннюю энергию тел системы и окружающей среды;

- в инерциальной системе отсчета изменение полной механической энергии системы равно работе непотенциальных сил (как внешних, так и внутренних). $\Delta W = W_2 - W_1 = A_{íåïîò}$

Явления природы разнообразны в своих свойствах и проявлениях, но замечательно то, что в определенных условиях, существуют законы сохранения каких-либо физических величин. Рассмотрим применение законов сохранения на примере решения ряда задач.

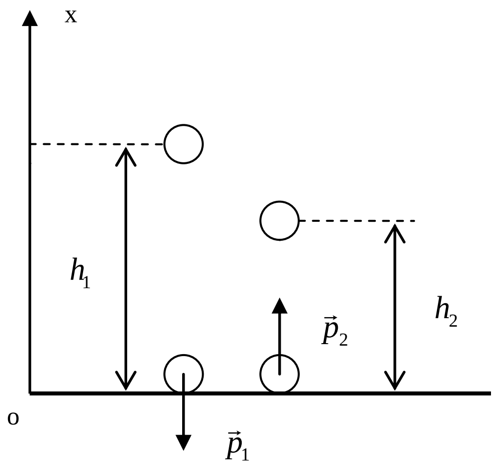
I. Импульс, изменение импульса, законы сохранения импульса, упругие и неупругие взаимодействия тел.

1.Шарик массой m падает с высоты h на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить изменение импульса шарика, если, упав, шарик так и остался лежать на Земле.



Импульс шарика при падении на Землю $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}$. Изменение импульса шарика $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Так как скорость шарика после удара о Землю стала равна нулю, то импульс его $p_2 = 0$. Тогда в проекции на ось Ox, изменение импульса $\Delta p_x = 0 - (-p_1) = m\upsilon = m\sqrt{2gh}$.

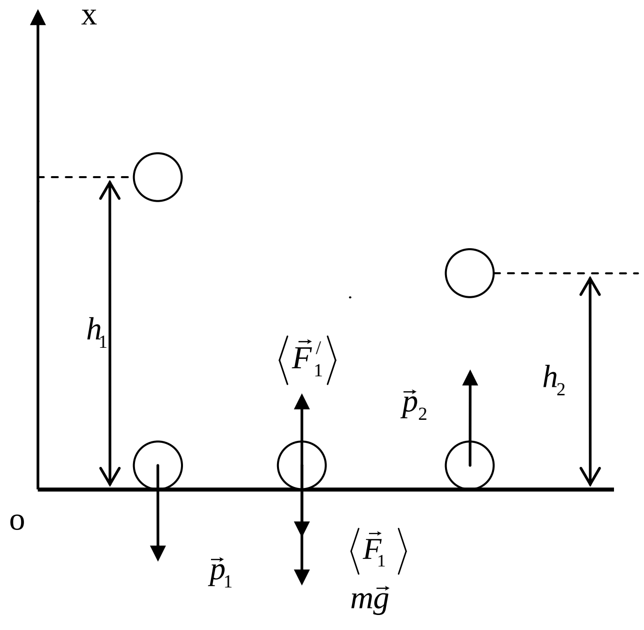
2. Изменим условие задачи. Шарик, падая на гладкую поверхность с высоты h_1, после отражения от нее поднимается на высоту h_2. Определим изменение импульса шарика и среднее значение силы удара шарика о поверхность, если продолжительность их взаимодействия Δt.



Изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Так как $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$, $\vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_2$, то $\Delta\vec{p} = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$.

В проекции на ось Ох: $\Delta p = m\upsilon_2 - (-m\upsilon_1) = m(\upsilon_2 + \upsilon_1) = m\left(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1}\right)$.
Если взаимодействие шарика с поверхностью абсолютно упругое, то $\upsilon_2 = \upsilon_1 = \upsilon$, $h_2 = h_1 = h$. Следовательно $\upsilon = \sqrt{2gh}$ и изменение импульса $\Delta p = 2m\upsilon = 2m\sqrt{2gh}$.

Для определения значения средней силы удара шарика о поверхность при продолжительности их взаимодействия Δt необходимо воспользоваться вторым законом Ньютона в импульсной форме: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \langle\vec{F}\rangle\Delta t$, где $\langle\vec{F}\rangle$– средняя сила, действующая на шарик за время удара Δt.



Так как шарик действует на поверхность со средней силой $\langle F_1\rangle$, то согласно третьему закону Ньютона поверхность действует на шарик с такой же по величине силой $\langle F_1^{/}\rangle = \langle F_1\rangle$, направленной в противоположную сторону. Помимо силы $\langle F_1^{/}\rangle$ на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$. Импульс шарика изменился под действием этих двух сил $\langle F_1^{/}\rangle$ и $m\vec{g}$, при этом:

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \left(\langle \vec{F}_1^{/}\rangle + m\vec{g}\right)\Delta t.$ В проекции на выбранную ось Ox имеем:

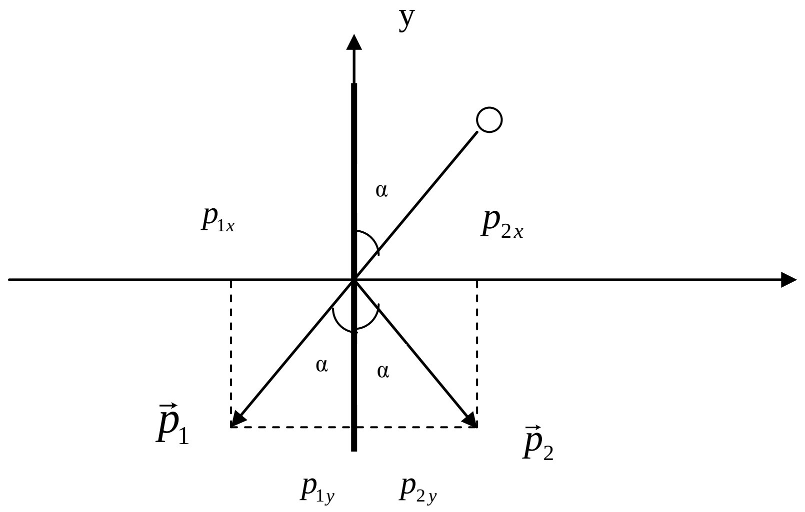
$\Delta p = p_2 + p_1 = \left(\langle F_1^{/}\rangle - mg\right)\Delta t$, или с учетом $\upsilon = \sqrt{2gh}$:

$\Delta p = m\left(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2dh_1}\right) = \left(\langle F_1^{/}\rangle - mg\right)\Delta t.$

Сила, действующая на шарик со стороны плоскости:

$$F_1^{/} = \frac{m\left(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1}\right)}{\Delta t} + mg.$$

3. Пусть шарик массой m упруго ударяется о стенку под углом α к ее поверхности. Определить среднее значение силы, действующей со стороны стенки на шарик, если скорость шарика в момент соударения υ, а время взаимодействия Δt. Трение отсутствует.

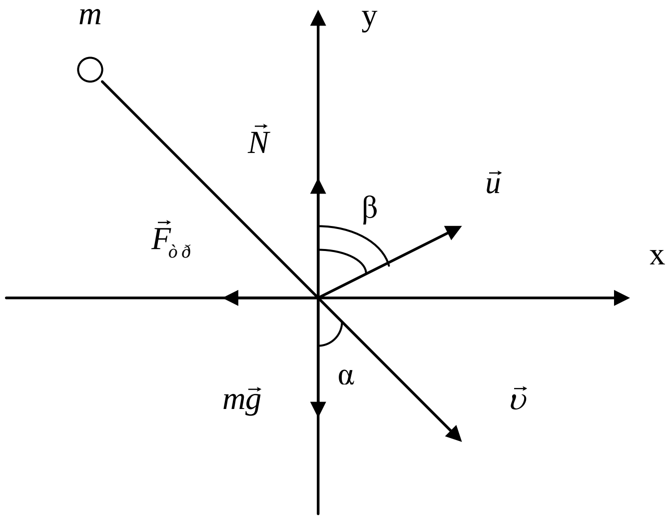


Аналогично предыдущим случаям воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме. Рассмотрим проекции импульсов на выбранные оси:

Oy: $m\upsilon_2\cos\alpha - m\upsilon_1\cos\alpha = \Delta p_y$, так как $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$, то $\Delta p_y = 0$, следовательно $\langle F_y\rangle = 0$.

Ox: $m\upsilon_2\sin\alpha + m\upsilon_1\sin\alpha = F_x\Delta t$ или с учетом, что $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$ имеем $2m\upsilon\sin\alpha = \langle F\rangle\Delta t$. Средняя сила, действующая на шарик равна: $\langle F\rangle = \dfrac{2m\upsilon\sin\alpha}{\Delta t}$.

4. Шарик ударяется о шероховатую поверхность под углом α к нормали со скоростью υ и отскакивает от нее под углом β к нормали. Потеря скорости составляет k=40%. Время удара шарика о поверхность Δt. Определить коэффициент трения шарика о поверхность.



Запишем второй закон Ньютона для данного случая: $m\vec{u}-m\vec{\upsilon}=\left(\vec{N}+m\vec{g}+\vec{F}_{òð}\right)\Delta t$. Проецируя это выражение на выбранные оси, получим:

Ох: $mu\sin\beta-m\upsilon\sin\alpha=-F_{òð}\Delta t(1)$.

Оу: $mu\cos\beta-(-m\upsilon\cos\alpha)=(N-mg)\Delta t(2)$.

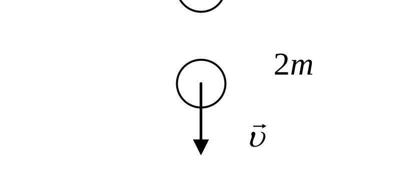
Учитывая, что сила трения $F_{òð}=\mu N$ и скорость $u=(1-k)\upsilon=0,6\upsilon$, из (2) получим $N=\dfrac{m\upsilon(0,6\cos\beta+\cos\alpha)}{\Delta t}+mg(3)$. Подставим (3) в (1):

$m\upsilon(0,6\sin\beta-\sin\alpha)=-\mu(\dfrac{m\upsilon(0,6\cos\beta+\cos\alpha)}{\Delta t}+mg)$. Отсюда

$\mu=\dfrac{\upsilon(\sin\alpha-0,6\sin\beta)\Delta t}{\upsilon(0,6\cos\beta+\cos\alpha)+g\Delta t}$.

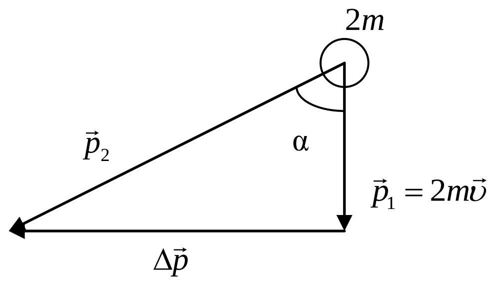
5. Одним из интересных случаев использования изменения импульса тела и применения его для нахождения направления движения тел, является задачи следующего содержания.

Два тела массами m и $2m$ движутся со скоростями $2\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}$, направленными перпендикулярно друг другу. На каждое тело действует сила, импульс которой одинаковый. Если после действия на тело массой m, оно стало двигаться в противоположном направлении со скоростью $2\vec{\upsilon}$ (на рисунке показано штриховой линией), определим величину и направление скорости тела массой $2m$.



Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме $\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}$. Так как импульс силы, действующей на тела, одинаков, то изменение импульса

$\Delta\vec{p}$ также одинаково. Тогда для первого тела, как видно из рисунка, изменение импульса $\Delta\vec{p}$ направлено горизонтально и равно $\Delta p = 4m\upsilon$. Зная теперь направление изменения импульса, его величину и правила вычитания векторов определим, каким стал импульс второго тела после действия на тело силы.



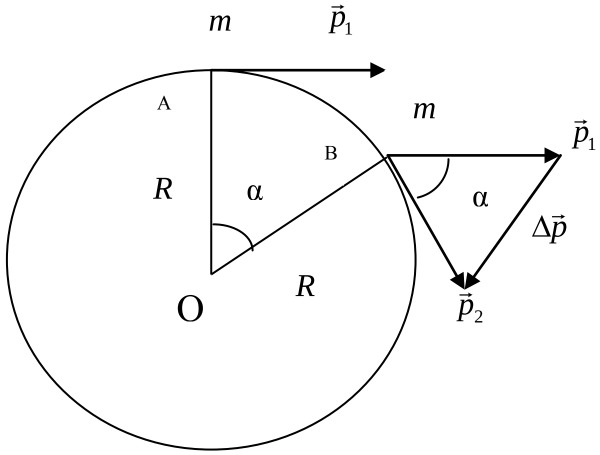
$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_2 = \Delta\vec{p} + \vec{p}_1$.

В скалярном виде: $p_2 = \sqrt{\Delta p^2 + p_1^2} = \sqrt{(4m\upsilon)^2 + (2m\upsilon)^2} = 2m\upsilon\sqrt{5}$

Тело массой $2m$ начнет двигаться под углом α к первоначальному направлению. Это угол определим из прямоугольника:

$$tg\alpha = \frac{\Delta p}{p_1} = 2 \Rightarrow \alpha = arctg\,2 = 63,4^{\circ}.$$

6. Рассмотрим изменение импульса тела при криволинейном движении. Начнем рассмотрение с простого случая движения тела по окружности с постоянной по модулю скоростью.



При изменении положения тела модуль скорости $|\vec{\upsilon}|$,а следовательно и $|\vec{p}_1|$, остаются постоянными. Изменяется направление скорости, а следовательно и импульса. Пусть первоначальное положение тела – точка А, а конечное – В. Радиус, связывающий центр окружности с телом, совершил поворот на угол α. Из геометрических соображений угол между векторами $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_1$ также α. Тогда изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ по модулю определим из теоремы косинусов: $\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\alpha} = m\upsilon\sqrt{2 - 2\cos\alpha}$. Из этого выражение видно, что при повороте радиуса на угол:

$\alpha = 60°, \Delta p = m\upsilon;$

$\alpha = 90°, \Delta p = m\upsilon\sqrt{2};$

$\alpha = 120°, \Delta p = m\upsilon\sqrt{3};$

$\alpha = 180°, \Delta p = 2m\upsilon;$

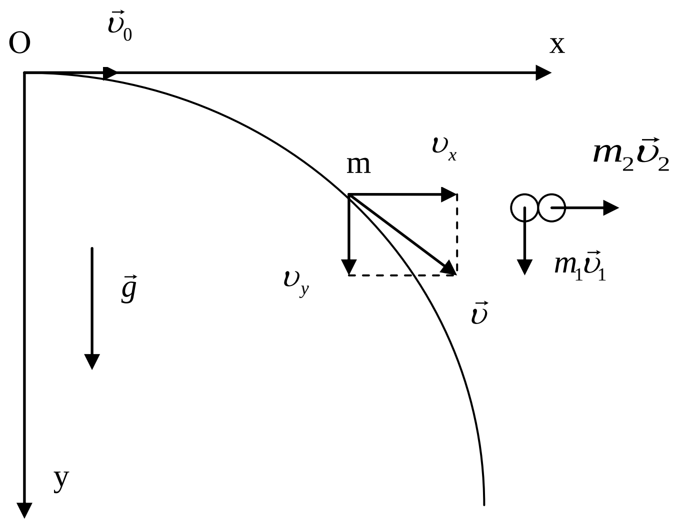
$\alpha = 360°, \Delta p = 0;$

7. Стоит подчеркнуть, что реальные системы не являются замкнутыми, так как сумма внешних сил редко оказывается равной нулю. Тем не менее в ряде случаев закон сохранения импульса можно применять.

Как уже отмечалось, если система не является замкнутой, но проекция результирующей силы на некоторое направление равна нулю, то и проекция импульса в этом направлении остается постоянной. Импульс системы, на которую действуют внешние силы можно считать постоянным и в случае быстротечных процессов, в этом случае время процесса $\Delta t \to 0$, следовательно, и импульс внешних сил стремится к нулю.

В качестве примера подобной ситуации приведем задачу о нахождении скоростей осколков снаряда(гранаты) после разрыва в процессе полета.

С высокого берега в горизонтальном направлении со скоростью υ_0 брошена граната. Спустя время t граната разрывается на два осколка, массы которых m_1 и m_2, причем $m_1 = 2m_2$. Первый осколок летит вертикально вниз, а второй – горизонтально. Определим скорости осколков после разрыва гранаты.



Учитывая быстротечность процесса разрыва гранаты, воспользуемся законом сохранения импульса: $m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$.

В проекциях на оси:

Oy: $m\upsilon_y = m_1\upsilon_1(1)$;

Ox: $m\upsilon_x = m_2\upsilon_2(2)$.

С учетом данных задачи $m = \dfrac{3}{2}m_1 = 3m_2$.

Проекции скорости гранаты $\vec{\upsilon}$ на горизонтальные оси:

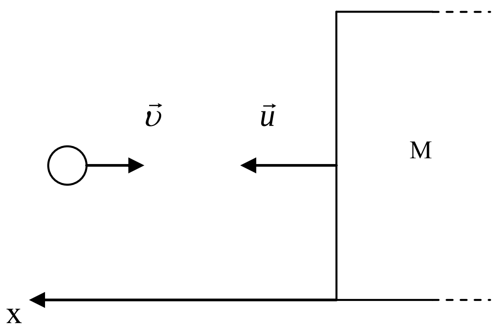
Ох: $\upsilon_x = \upsilon_0 = const$;

Оу: $\upsilon_y = gt$.

Тогда скорость осколка массой m_1 из (1) равна: $\upsilon_1 = \frac{m\upsilon_y}{m_1} = \frac{3gt}{2}$; а осколка массой m_2 из (2): $\upsilon_2 = \frac{m\upsilon_x}{m_2} = 3\upsilon_0$.

II. Рассмотрим совместное применение законов сохранения импульса и энергии в механике.

1. Одной из интересных задач по теме «Законы сохранения в механике» является взаимодействие движущегося со скоростью $\vec{\upsilon}$ шарика массой m с движущейся навстречу (или в одном направлении с шариком) со скоростью $\vec{u}$ массивной плиты массой М ($m \ll M$).



В этой задаче рассматривается центральное упругое соударение, для которого справедливы законы сохранения

импульса: $M\vec{u} + m\vec{\upsilon} = M\vec{u}' + m\vec{\upsilon}'$, или в проекции на ось Ох: $Mu - m\upsilon = Mu' + m\upsilon'(1)$, где u' и υ' – скорости плиты и шарика после взаимодействия;

и энергии: $\frac{Mu^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{Mu'^2}{2} + \frac{m\upsilon'^2}{2}(2)$.

Приведем выражения (1) и (2) к следующему виду:

$M(u - u') = m(\upsilon' + \upsilon)(3)$;

$M(u^2 - u'^2) = m(\upsilon'^2 - \upsilon^2)(4)$.

Поделив выражения (4) и (3) почленно получаем:

$u + u' = \upsilon' - \upsilon \Rightarrow u' = \upsilon' - \upsilon - u(5)$.

Подставим (5) в (1): $Mu - m\upsilon = M\upsilon' - M\upsilon - Mu + m\upsilon'$, получаем

$$\upsilon' = \frac{2Mu + m\upsilon - m\upsilon}{M + m}(6)$$

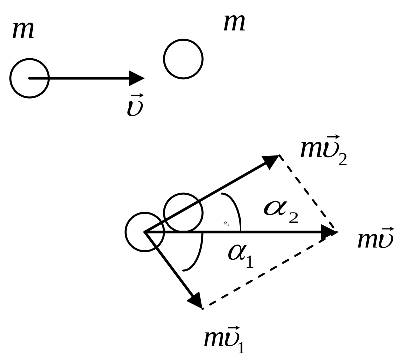
Разделим числитель и знаменатель на массу плиты М, учтем, что масса шарика $m \ll M$, получим скорость шарика после взаимодействия с плитой

$\upsilon' = 2u + \upsilon$.

Если шарик и плита движутся в одном направлении $(\upsilon < u)$, то выражение (3) будет иметь вид: $M(u - u') = m(\upsilon' - \upsilon)(3')$. После деления выражений (4) и (3') почленно, получим: $u' = \upsilon' + \upsilon - u$.

Тогда $Mu + m\upsilon = M\upsilon' + m\upsilon - Mu + m\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \dfrac{2Mu - M\upsilon + m\upsilon}{M+m}$. С учетом, что $m \ll M$, получаем скорость шарика после взаимодействия с плитой $\upsilon' = 2u - \upsilon$.

2. Рассмотрим нецентральное упругое взаимодействие: шар массой m налетает со скоростью $\vec{\upsilon}$ на такой же покоящийся шар и после упругого соударения отскакивает под углом α_1 к направлению своего движения. Определим скорости шаров после соударения и угол между направлениями скоростей.



Для упругого взаимодействия справедливы законы сохранения импульса: $m\vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 (1)$ и энергии: $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} (2)$.

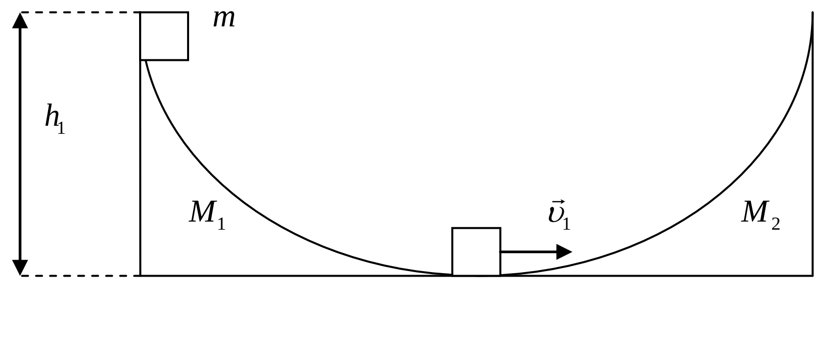
Из выражений (1) и (2) очевидно, что $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ и $\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2$, а это значит, что $\vec{\upsilon}_1 \perp \vec{\upsilon}_2$, т.е. угол между направлениями скоростей равен 90º.

Тогда $\upsilon_1 = \upsilon \cos\alpha_1$; $\upsilon_2 = \upsilon \cos\alpha_2$

Угол $\alpha_2 = 90 - \alpha_1$, тогда $\upsilon_2 = \upsilon \sin\alpha_1$.

3. На примере решения следующих двух задач покажем, как с помощью формулы для кинетической энергии тела, выраженной через импульс тела ($W_к = \dfrac{p^2}{2m}$), можно упростить решение сложных задач.

Два первоначально неподвижных клина массами M_1 и M_2 имеют плавные переходы на гладкую горизонтальную поверхность и расположены так как показано на рисунке. С высоты h_1 соскальзывает без трения шайба массой m. Определим высоту, на которую поднимается шайба по правому клину.



Так как трение в системе «клин-шайба» отсутствует, то воспользуемся законом сохранения энергии для момента, когда шайба спускается с левого клина: $mgh_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{M_1 u_1^2}{2}(1)$, где u_1 - скорость левого клина в тот момент, когда шайба спустилась с него.

Для случая, когда шайба поднялась на какую-то высоту h_2 правого клина: $\frac{m\upsilon_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{(M+m)u_2^2}{2}(2)$.

Рассмотрев процесс движения шайбы и клиньев, видим, что импульсы шайбы ($\vec{p} = m\vec{\upsilon}_1$), левого клина ($\vec{p} = M_1\vec{u}_1$) и шайбы с правым клином ($\vec{p} = (m+M)\vec{u}_2$) равны по модулю. Тогда выражение (1) перепишем в виде:

$mgh_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2M_1}(3)$, выражение (2) запишем следующим образом:

$$mgh_2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2(m+M_2)}(4)$$

Поделив (3) на (4), получим:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{(M_1+m)(M_2+m)}{M_1 M_2} \Rightarrow h_2 = h_1 \frac{M_1 M_2}{(M_1+m)(M_2+m)}.$$

Если массы клиньев равны, то $h_2 = h_1\left(\frac{M}{M+m}\right)^2$.

4. Рассмотрим цикл задач, в которых исследуется поведение системы тел, соединенных деформированной невесомой пружиной.

Два шарика массами m_1 и m_2 соединены деформированной пружиной и удерживаются на гладкой горизонтальной поверхности с помощью продетой через пружину нитью. Определить кинетические энергии шариков после пережигания нити в момент, когда исчезает деформация. Первоначальная величина деформации составляет x, жесткость пружины k.

Полная механическая энергия данной замкнутой системы тел, взаимодействующих консервативными силами(упругости), остается неизменной и равной: $W = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} = const(1).$ Из закона сохранения импульса находим, что модули импульсов тел будут равны $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 = p.$ тогда выражение (1) запишем в виде: $\frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2}$.. Отсюда $p^2 = \frac{kx^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$

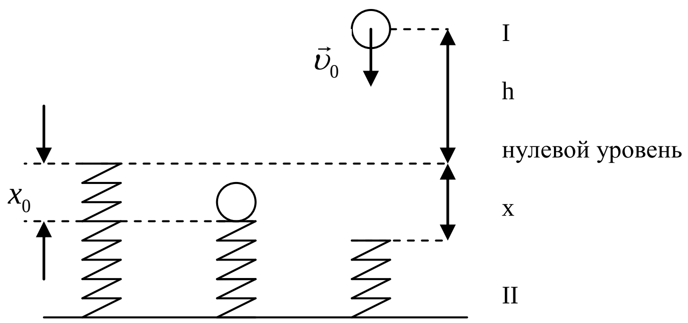
Тогда кинетическая энергия первого тела $W_1 = \frac{kx^2 m_2}{2(m_1+m_2)};$ второго тела

$$W_2 = \frac{kx^2 m_1}{2(m_1+m_2)}.$$

Изменим условие предыдущей задачи. После пережигания нити отпускаем первое тело, удерживая второе. В момент когда пружина становится недеформированной, отпускаем и второе. Определим максимальную деформацию x_{max} пружины.

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины превращается в кинетическую энергию первого тела, пружина становится недеформированной: $\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \frac{p^2}{2m_1}$(1). После того, как отпустили и второе тело, изменяются скорости тел и величина деформации пружины. Максимальная деформация пружины возникнет в тот момент, когда относительная скорость тел станет равной нулю, т.е. когда тела будут двигаться с одинаковой скоростью в одном направлении. Следовательно импульсы тел будут равными. Из закона сохранения импульса $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon = p.$ Тогда закон сохранения механической энергии будет иметь вид: $\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2_{\max}}{2}$ или $\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{kx^2_{\max}}{2}$. Перепишем это выражение в виде $\frac{kx^2_{\max}}{2} = \frac{p^2}{2m_1} - \frac{p^2}{2(m_1+m_2)}$(2). Поделив (1) на (2) почленно, получим $\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 = \frac{m_1+m_2}{m_2} \Rightarrow x_{\max} = x\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$.

5. Расположим невесомую пружину вертикально и определим ее сжатие в тот момент, когда с высоты h относительно ее верхнего конца бросить со скоростью υ_0 на пружину шар. Если на верхний конец пружины положить шар, то он сжимает ее на величину x_0



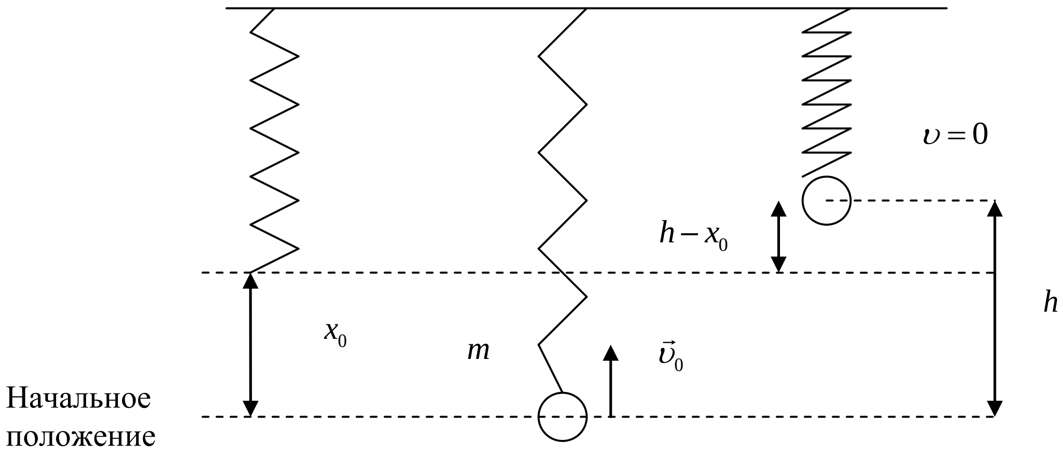
Из рисунка, схематично поясняющего все описанные процессы, видим, что сила тяжести шара $|m\vec{g}|$ равна силе упругости, возникающей в пружине. $mg = kx_0$(1). Так как эти силы консервативные(потенциальные), воспользуемся законом сохранения энергии. В положении I полная энергия равна: $W_{\mathrm{I}} = mg(h+x) + \frac{m\upsilon_0^2}{2}$(2) ; в положении II: $W_{\mathrm{II}} = \frac{kx^2}{2}$(3). $W_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{II}}$.

Приравняем правые части (2) и (3): $mg(h+x) + \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$(4). Из (1) $k = \frac{mg}{x_0}$.

Тогда (4) будет иметь вид: $mg(h+x)+\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\frac{mgx^2}{2x_0}(5)$. Преобразуем квадратное уравнение (5) к виду $x^2-2x_0x-(2x_0h+\frac{x_0\upsilon_0^2}{g})=0$ и решим его относительно x. Ответом задачи является: $x=x_0\pm\sqrt{x_0^2+2x_0h+\frac{x_0\upsilon_0^2}{g}}$.

6. В заключение рассмотрим различия, наблюдаемые в деформациях пружины и резинового жгута(шнура). Ошибка, часто встречающаяся при решении задач, хорошо объясняется в [1]. Резиновый шнур в отличие от пружины подвержен только деформации сжатия. При попытке сжать шнур, он теряет форму, изгибается, не оказывая никакого сопротивления.

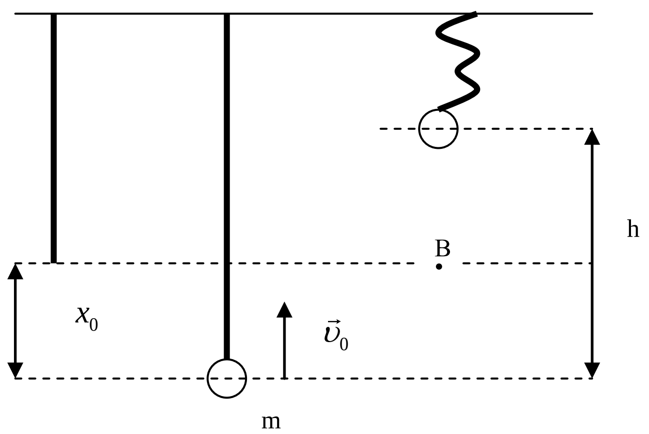
Рассмотрим сначала вертикальную пружину жесткостью k. Подвесив на пружину груз массой m, пружина растянется на величину x_0: $mg=kx_0(1)$.



Запишем закон сохранения энергии данной системы относительно начального положения груза, если грузу резким толчком сообщить начальную скорость $\vec{\upsilon}_0$, направленную вертикально вверх:

$\frac{kx_0}{2}+\frac{m\upsilon_0^2}{2}=mgh+\frac{k(h-x_0)^2}{2}(2)$, где h – максимальная высота подъема груза после того, как его со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ толкнули вертикально вверх, $(h-x_0)$– возникшая деформация пружины. Раскрыв скобки в формуле (2), подставив из (1) $x_0=\frac{mg}{k}$, получим: $\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\frac{kh^2}{2}(3)\Rightarrow h=\upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}}(4)$. Можно отметить, искомая высота подъема груза на пружине не зависит от поля тяготения. Это объясняется тем, что в положении равновесия груза равнодействующая сил тяжести и упругости равна нулю, а при смещении груза на любую величину $\Delta x=x-x_0$ сила тяжести не меняется, а возникающая сила упругости равна $F_{упр}=-k\Delta x$, она и является равнодействующей в процессе движения груза. Потенциальная энергия при этом равна: $W_п=\frac{k\Delta x^2}{2}$, что и приводит в результате к формулам (3) и (4).

Перейдем к рассмотрению поведения резинового шнура.



Начальное растяжение $x_0 = \frac{mg}{k}(5)$. Сравнивая формулы (4) и (5) можно заметить, что при $\upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}} > \frac{m}{k}$ в резиновом шнуре исчезнет сила упругости при прохождении положения равновесия (т.В), шнур изгибается. В данном случае закон сохранения механической энергии запишется в виде: $\frac{kx_0^2}{2} + \frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgh(6)$. С учетом (5) высота подъема груза $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k}(7)$.

Литература.

1.Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями.–М:КДУ,2005.–352с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы.–М.: «Дрофа»,2000.–672с.