Сила Архимеда и уровень жидкости в сосуде

Драпезо Л.И., Петров К.А., Погудо Л.П., Развин Ю.В., Развина Т.И.

Неверные решения отдельных задач с применением закона Архимеда встречаются довольно часто. Объясняется это тем, что при использовании не только этого, но и любого другого закона физики не всегда помнят, таким образом и для каких ситуаций этот закон был установлен.

Выталкивающая сила Архимеда является результатом действия разных по величине сил гидростатического давления на различные участки погруженного в неподвижную жидкость тела. Сила Архимеда равна весу жидкости или газа, вытесненного телом. Если в жидкость погружена только часть тела, то выталкивающая сила Архимеда равна весу жидкости, вытесненной этой погруженной частью тела. Следует также подчеркнуть, что точка приложения выталкивающей силы находится в центре тяжести вытесненного объема жидкости и совпадает с центром тяжести самого тела, если тело однородное и полностью погружено в жидкость.

Если тело неоднородно, то точки приложения сил тяжести и Архимеда не совпадают, возникает вращающий момент, тело в жидкости начинает поворачивается до тех пор, пока силы тяжести и Архимеда не расположатся вдоль одной вертикали (рис1а,б).

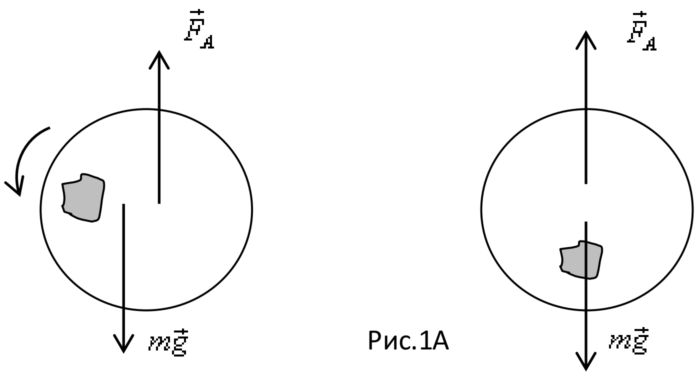


Рис.1А

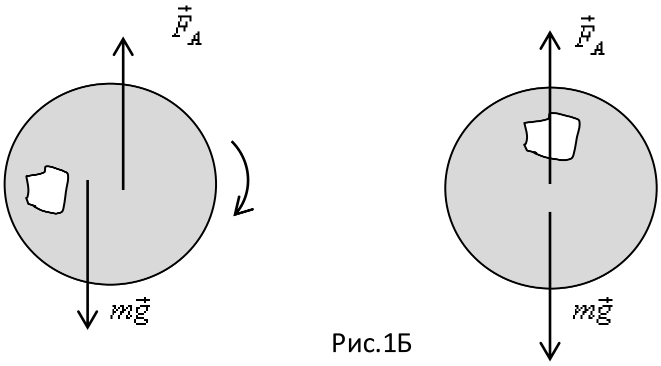
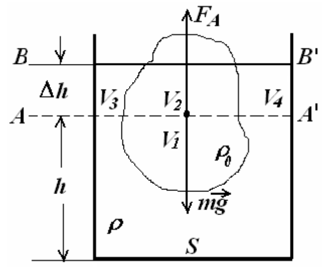


Рис.1Б

Моменты обеих сил равны нулю и положение тела становится устойчивым, т.к. центр тяжести будет расположен в наинизшем положении.

В настоящей работе рассматривается изменение уровня жидкости в сосуде при помещении в него или удалении из него плавающего тела.

Задача 1. В цилиндрический сосуд с площадью основания S налита жидкость плотностью ρ. В сосуд опускают тело произвольной формы массой m (плотность тела ρ_0 меньше плотности жидкости ρ). Определим изменение Δh уровня жидкости в сосуде.



До погружения тела в жидкость ее поверхность располагалась на уровне AA' на высоте h от дна (см. рис) После погружения тела уровень жидкости сместился на Δh и занял положение BB',т.е. повысился на Δh. Тело плавает на поверхности жидкости, т.к. его плотность ρ_0 меньше плотности жидкости ρ. Согласно условию плавания тела сила тяжести mg, действующая на тело, равна силе Архимеда F_A, т.е. $mg = F_A$, или $mg = \rho g V_п$ (1), где $V_п$ - объем погруженной части тела, равный $V_п = V_1 + V_2$. Тогда выражение (1) примет вид $m = \rho(V_1 + V_2)$ (2).

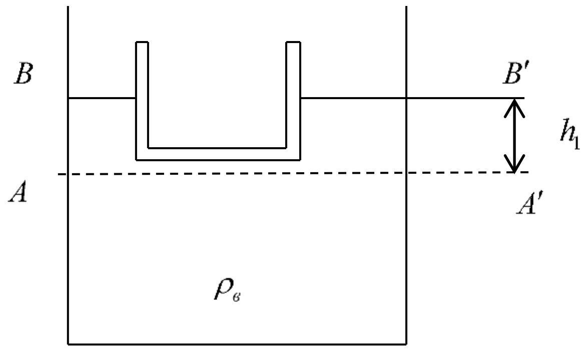
Из рисунка видно, что объем $S\Delta h = V_2 + V_3 + V_4$, где V_2 - некоторый объем, занимаемый телом, V_3 и V_4 - некоторый объем жидкости. Плавающее тело непосредственно вытесняет только объем жидкости V_1, равный сумме объемов V_3 и V_4 жидкости, расположенной выше уровня AA': $V_1 = V_3 + V_4$. Тогда $S\Delta h = V_1 + V_2$ (3). Из выражения (2) мы находим, что $V_1 + V_2 = \frac{m}{\rho}$, тогда $S\Delta h = \frac{m}{\rho} \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta h = \frac{m}{\rho S}$. Если учесть, что масса тела $m = \rho_0 V$, то изменение уровня жидкости в цилиндрическом сосуде площадью основания S равно $\Delta h = \frac{\rho_0 V}{\rho S}$.

Таким образом, погружение тела произвольной формы в сосуд цилиндрической формы с жидкостью приводит к изменению уровня жидкости на $\Delta h = \frac{m}{\rho S} = \frac{\rho_0 V}{\rho S}$.

Задача 2. На поверхность цилиндрического сосуда с водой опустили прямоугольную коробочку, изготовленную из материала, плотность которого $\rho = 7800 \frac{кг}{м^3}$. При этом уровень воды в сосуде повысился на $h_1 = 15{,}6 мм$. Определим, на сколько понизиться этот уровень воды, если коробочку полностью погрузить в жидкость.

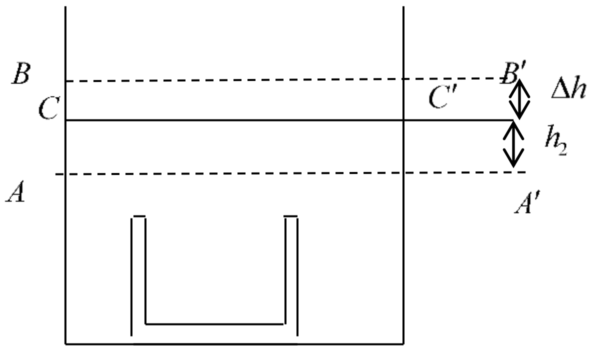
Решение:

До погружения коробки в сосуд с водой свободная поверхность воды в сосуде находилась на уровне AA'. После погружения коробки уровень жидкости повысился на высоту h_1 до положения BB' (см. рис. а).



а

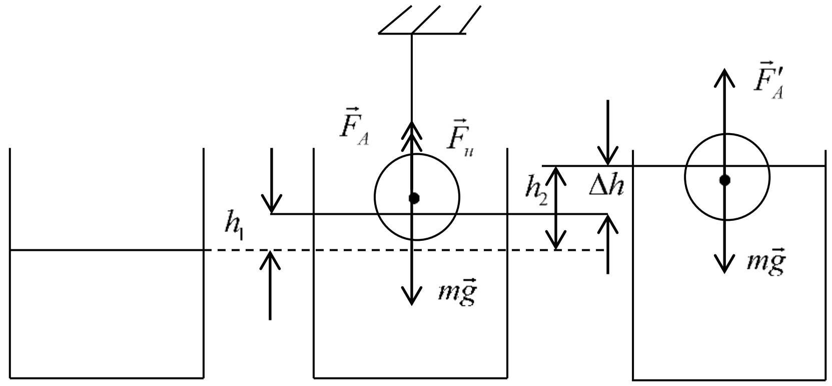
Погрузив коробочку полностью в жидкость, ее уровень понизится относительно BB' на Δh и займет положение CC'. Относительно первоначального положения AA' этот уровень будет поднят на h_2 (см.рис.б).



б

Таким образом искомое понижение уровня $\Delta h = h_1 - h_2$. Воспользуемся результатом решения задачи 1: повышение уровня $h_1 = \dfrac{m}{\rho_в S}(1)$, где $m-$ масса коробочки, $\rho_в-$ плотность воды, S –площадь сечения цилиндрического сосуда. В случае полного погружения коробочки в сосуд с водой, уровень свободной поверхности воды поднимется на высоту h_2 относительно уровня воды AA', т.е. $h_2 = \dfrac{V_к}{S} = \dfrac{m}{\rho_к S}(2)$, где $V_к$–объем коробочки. Из (1) масса коробочки $m = \rho_в S h_1$, тогда выражение (2) запишется в виде $h_2 = \dfrac{\rho_в h_1}{\rho_к}$. После погружения плавающей на поверхности воды коробочки полностью в воду, уровень воды понизится на $\Delta h = h_1 - \dfrac{\rho_в h_1}{\rho_к} = h_1 \dfrac{\rho_к - \rho_в}{\rho_к}$; $\Delta h = 13,6 мм$.

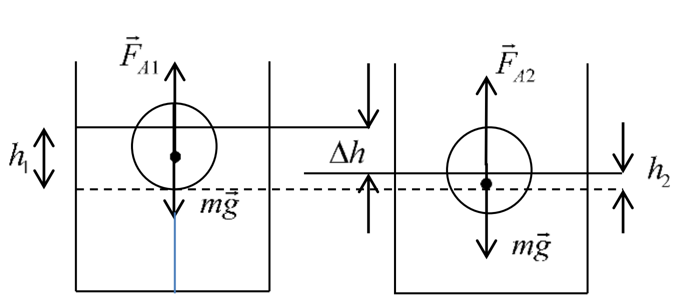
Задача 3. Деревянный шарик подвешен на нити и погружен в цилиндрический сосуд с водой так, что нить оказывается натянутой с силой $F_н = 2H$. Если нить перерезать, то шарик станет плавать в сосуде. Определим насколько и как изменится уровень воды в сосуде. Площадь дна сосуда $S = 200 см^2$, плотность воды $\rho = 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$



а б в у

При помещении шарика на нити в сосуд с водой уровень воды повышается на высоту $h_1 = \dfrac{mg - F_н}{\rho_в g S}$. После того, как нить перерезана, т.е. деревянный шарик плавает на поверхности воды, уровень воды относительно уровня свободной поверхности жидкости оказывается на высоте $h_2 = \dfrac{mg}{\rho_в g S}$. Тогда изменение уровня воды в сосуде после того, как нить перерезана, $\Delta h = h_2 - h_1 = \dfrac{F_н}{\rho_в g S} = 1{,}0 см$.

Изменим исследуемую ситуацию. Пусть деревянный шарик привязан невесомой нитью ко дну цилиндрического сосуда с водой, как показано на рисунке г. Нить натянута с силой $F = 2H$. Если нить перерезать, то шарик станет плавать в сосуде. Определим, насколько и как изменится уровень воды в сосуде. Площадь дна сосуда $S = 200 см^2$, плотность воды $\rho = 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$.



г д

Аналогично решению предыдущей задачи, повышение уровня воды в сосуде $h_1 = \frac{mg + F_н}{\rho_в g S}$. После того, как нить будет перерезана, повышение уровня относительно уровня свободной поверхности жидкости составит $h_2 = \frac{mg}{\rho_в g S}$ (рис.д).Тогда $\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{F_н}{\rho_в g S} = 1,0 см.$

Задача 4. Однородное тело плавает сначала в керосине ($\rho_к = 800\frac{кг}{м^3}$), затем в воде ($\rho_в = 1000\frac{кг}{м^3}$). Выясним, изменится ли при этом сила Архимеда и объем погруженной в жидкость части тела.

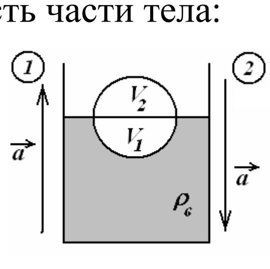
На тело, плавающее в жидкости, действуют сила тяжести и выталкивающая сила Архимеда. Масса тела не изменяется, следовательно $mg = F_{Ак} = F_{Ав}$, т.е. сила Архимеда, действующая на тело, плавающее в керосине, равна силе Архимеда, действующей на это же тело в воде. Эти силы соответственно равны $\rho_к g V_к = \rho_в g V_в$. Из этого выражения видно, что объем погруженной части тела в керосине больше объема погруженной части тела в воду, в $\frac{V_к}{V_в} = \frac{\rho_в}{\rho_к} = 1,25$раз.

Задача 5. Однородное тело, плотность которого ρ_T, плавает на поверхности жидкости плотностью $\rho_Ж$. Определим, как изменяется выталкивающая сила Архимеда и объем погруженной в жидкость части тела, если сосуд с жидкостью перемещать вертикально с ускорением $\vec{a}$, направленным: а) вверх; б) вниз.

Если тело плавает на поверхности жидкости в неподвижном сосуде, то выполняется условие равновесия $mg = F_A$, где m – масса тела, равная $m = \rho_Т V g$ (1); $F_A = \rho_Ж g V_1$ (2) – выталкивающая сила Архимеда, равная весу вытесненной жидкости в объеме V_1 погруженной части тела. Отметим, что вес как тела, так и жидкости в неинерциальной системе отсчета, т.е. в системе, движущейся с ускорением $\vec{a}$, изменяется, следовательно, сила Архимеда также изменяется и становится равной $F'_A = \rho_Ж (g \pm a) V'_1$ (3), где знак «+» соответствует случаю, когда ускорение $\vec{a}$ направлено вверх, а «–» - случаю, когда ускорение $\vec{a}$ направлено вниз, V'_1 - объем части тела, погруженной в жидкость при движении сосуда с ускорением.

Исследуем, изменяется ли объем погруженной в жидкость части тела:

в инерциальной системе отсчета: $mg = F_A$ (4);



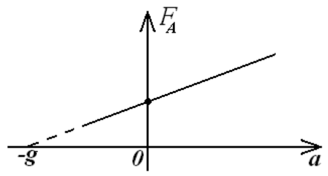
в неинерциальной системе отсчет: $m(g \pm a) = F'_A$ (5).

С учетом выражений (1) – (3) выражения (4) и (5) примут вид

$\rho_T V = \rho_Ж V_1$ (4′), $\rho_T V(g \pm a) = \rho_Ж (g \pm a) V_1' \Rightarrow \rho_T V = \rho_Ж V_1'$ (5′)

Как видно из (4′) и (5′), <u>объем погруженной части тела не изменяется,</u> т.е. $\Delta V = V_1' - V_1 = 0$, а сила Архимеда изменяется от $F_A = \rho_Ж g V_1$ до $F'_A = \rho_Ж (g \pm a) V_1$. С учетом выражения (4′) $V_1 = \dfrac{\rho_T}{\rho_Ж} V$, тогда изменение силы Архимеда ΔF_A составит $\Delta F_A = \pm \rho_T V a$.

Зависимость силы Архимеда, действующей на тело, плавающее на поверхности жидкости в сосуде, движущемся ускоренно, от величины ускорения представлена на графике.



Как видно из графика, при движении сосуда с ускорением $a = g$, направленным вертикально вниз, на тело, погруженное в жидкость, сила Архимеда не действует, т.е. в невесомости $F_A = 0$.

Задача 6. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает куб из материала плотностью ρ. Ребро куба равно l. Определите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы: а) полностью погрузить куб в жидкость; б) удалить его из жидкости.

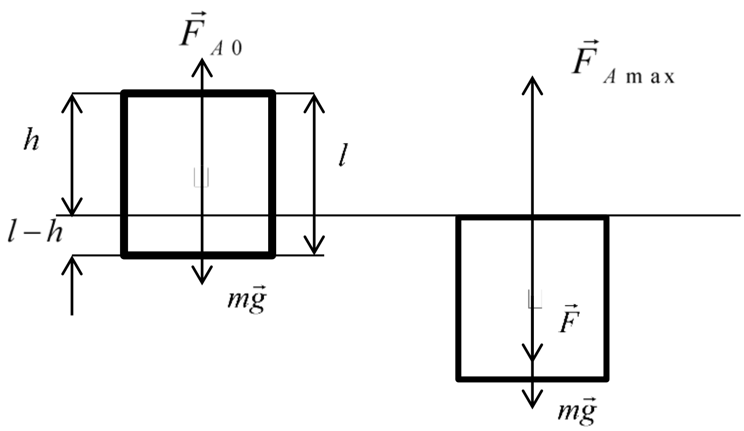


Рис.а Рис.б

а)На куб, плавающий в жидкости, действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и равная ей сила Архимеда $\vec{F}_{A_0}$, т.е. $mg = F_{A_0}$ (1) (рис. *а*). При погружении куба в жидкость сила Архимеда увеличивается от $\vec{F}_{A_0}$ до максимального значения $F_{A_{\max}} = \rho_ж g l^3$ (2) в момент, когда куб будет полностью находится в жидкости (рис. *б*). Сила $\vec{F}$, удерживающая тело в жидкости, также увеличивается и достигает значения $F = F_{A_{\max}} - mg$, с учётом (1) $F = F_{A_{\max}} - F_{A_0}$(3). Работа переменной силы при погружении куба на глубину, равную $\boldsymbol{y}$, определится как $A_1 = F_{cp} \cdot h = \frac{F_{A_{\max}} - F_{A_0}}{2} h$ (4).

Из выражения (1) определим высоту выступающей части куба h:

$\rho l^3 g = \rho_ж g l^2 (l - h)$ (5)$\Rightarrow$ $h = \frac{\rho_ж - \rho}{\rho_ж} l$(6), где $l^2(l-h)$ – объем погруженной в жидкость части плавающего куба. Тогда с учетом (4)–(6) работа по погружению куба в жидкость равна

$$A_1 = \frac{\rho_ж g l^3 - \rho_ж g l^2 (l-h)}{2} h =$$

$$= \frac{\rho_ж g l^2 h^2}{2} = \frac{\rho_ж g l^4 (\rho_ж - \rho)^2}{2\rho_ж^2} = \frac{(\rho_ж - \rho)^2 g l^4}{2\rho_ж} \quad (7).$$

б) Определим работу по удалению плавающего куба из жидкости. По мере удаления куба из жидкости сила Архимеда будет уменьшаться от F_{A_0} до 0, при этом сила $\vec{F}$, удерживающая куб, будет увеличиваться от 0 до mg (рис. *в* и *г*).

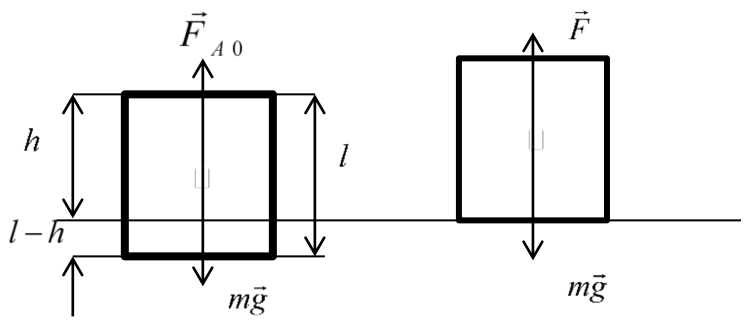


Рис.в Рис.г

Работа этой переменной силы при перемещении куба на $(l-h)$ равна $A_2 = F_{ср} \cdot (l-h)$ (8).

Среднее значение силы равно $F_{ср} = \frac{F}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{\rho l^3 g}{2}$ (9).

Расстояние $(l-y)$ из выражения (5) равно $l - h = \frac{\rho}{\rho_ж} l$ (10).

С учётом выражений (9) и (10) работа A_2 по удалению плавающего куба из жидкости равна $A_2 = \frac{\rho l^3 g \rho l}{2\rho_ж} = \frac{\rho^2 l^4 g}{2\rho_ж}$.

Таким образом работа по погружению тела кубической формы в жидкость

$A_1 = \frac{(\rho_ж - \rho)^2 g l^4}{2\rho_ж}$; Работа по удалению его из жидкости $A_2 = \frac{\rho^2 l^4 g}{2\rho_ж}$.

Задача 7. В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высотой l и сечением площадью S. При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом совершается? Сечение стакана равно $5S$, начальная высота воды в стакане – l, плотность бруска $\rho = 0{,}5\rho_0$, где ρ_0 – плотность воды.

На брусок, плавающий в воде (рис. *а*), действуют силы: вертикально вниз – сила тяжести $mg = \rho Slg$, а вертикально вверх – выталкивающая сила Архимеда $F_{\text{А}} = \rho_0 Sl_{\text{п}} g$, где $l_{\text{п}}$ – высота погруженной части бруска. Из условия плавания тел следует, что $mg = F_{\text{А}} \Rightarrow \rho Slg = \rho_0 Sl_{\text{п}} g \Rightarrow$

$\Rightarrow$ высота погруженной части бруска равна $l_{\text{п}} = \dfrac{\rho}{\rho_0} l = 0{,}5l$ (1), что и отражено на рис. *а*.

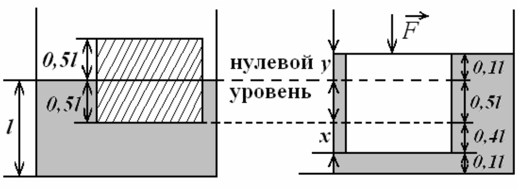


рис. а *рис. б*

Пусть на брусок подействовали силой F, направленной вниз. Под действием этой силы брусок сместится на расстояние x от нулевого уровня (рис. *б*). При этом он вытесняет объем воды, равный Sx.

Уровень воды в стакане повысится на величину y, которая определится из условия $Sx = (5S - S)y \Rightarrow y = \dfrac{x}{4}$. Следовательно, смещение бруска вниз на x приведет к тому, что высота погруженной части в жидкость бруска возрастет на $y + x = \dfrac{5x}{4}$. Для того чтобы весь брусок оказался под водой, необходимо, согласно (1), чтобы $\dfrac{5x}{4} = \dfrac{l}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2l}{5} = 0{,}4l$, при этом уровень воды поднимается на $y = \dfrac{x}{4} = 0{,}1l$, как показано на рис. *б*.

Уже отмечалось, что для погружения бруска в воду к нему необходимо приложить силу F, причем при медленном равномерном погружении модуль этой силы увеличивается и достигает максимального значения, равного разности между изменяющейся выталкивающей силой Архимеда, действующей на брусок, и силой тяжести:

$$F = F_{\text{А}} - mg = \rho_0 S\left(\frac{l}{2} + x\right)g - \rho Slg =$$

$$= \rho_0 S\left(\frac{l}{2} + x\right)g - 0{,}5\rho_0 Slg = \rho_0 Sxg\,.$$

Как видно, эта сила линейно зависит от смещения бруска x и при полном погружении бруска равна $F = 0{,}4\rho_0 Slg$.

После того, как брусок полностью оказывается в жидкости, дальнейшее погружение его на $0{,}1l$ не приводит к изменению силы F. График зависимости силы F от глубины погружения приведен на рис. *в*.

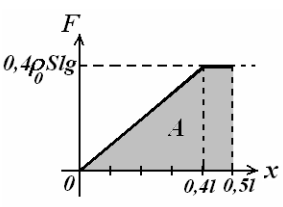
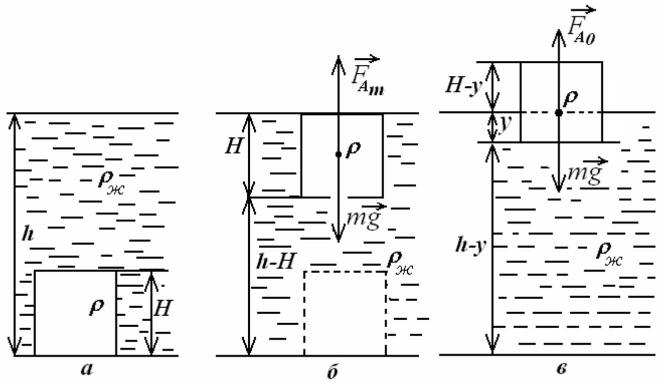


рис. в

Работа переменной силы равна площади трапеции, ограниченной графиком *F(x),* т.е.

$$A = \frac{(0,5+0,1)l}{2} \cdot 0,4\rho_0 Slg = 0,12\rho_0 Sl^2 g\ .$$

Задача 8. Деревянный цилиндр плотностью ρ, радиусом R и высотой H всплывает в водоёме $(\rho_{ж})$ с глубины h (см. рис.). Ось цилиндра по мере всплытия остаётся направленной вертикально. Определим количество теплоты, выделившееся к моменту окончания движения цилиндра и воды.



При движении цилиндра в воде на него действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и Архимеда $\vec{F}_A$, причём при движении цилиндра до поверхности воды сила Архимеда будет постоянна и равна максимальному значению $F_{A\max} = \rho_{ж} SHg$ (рис. *б*). Площадь основания цилиндра $S = \pi R^2$, объём цилиндра $V = SH = \pi R^2 H$ равен объему вытесняемой им воды, то сила Архимеда $F_{A\max} = \rho_{ж}\pi R^2 Hg$.

Далее цилиндр, имея некоторую скорость, переходит границу поверхности жидкости, и длительное время колеблется, пока не займёт положение равновесия (рис. *в*), в котором силы тяжести $m\vec{g}$ и Архимеда $\vec{F}_{A_0}$ уравновесят друг друга: $mg = F_{A_0}$ или $\rho\pi R^2 Hg = \ = \rho_{ж}\pi R^2 yg$ Отсюда глубина погружения цилиндра y равна $y = \dfrac{\rho}{\rho_{ж}} H$ (1). Сила Архимеда при переходе границы поверхность жидкости – воздух линейно изменяется от $F_{A\max} = \rho_{ж}\pi R^2 Hg$ до $F_{A_0} = \rho\ \pi R^2 Hg$.

Количество теплоты Q, которое выделится, пока цилиндр займёт положение равновесия, равно изменению внутренней энергии цилиндра и воды. Если воспользоваться теоремой об изменении механической энергии системы, то, с одной стороны, ее изменение равно изменению внутренней энергии системы, или $\Delta E = Q$ (2), а с другой – работе всех сил, действующих на систему: $\Delta E = A$.

Работа сил, действующих на цилиндр, равна

$$A = -mg(h-y) + F_{A\max}(h-H) + F_{A_{ср}}(H-y) \text{(3)}.$$

Среднее значение силы Архимеда $F_{A_{\text{ср}}}$ равно

$$F_{A_{\text{ср}}}=\frac{F_{A\max}+F_{A_0}}{2}=\frac{F_{A\max}+mg}{2} \quad (4).$$

$-mg(h-y)$ – работа силы тяжести, « – » перед выражение означает, что угол между направлениями силы тяжести и перемещения равен 180°; $F_{A\max}(h-H)$ – работа постоянной силы Архимеда; $\frac{F_{A\max}+mg}{2}(H-y)$ – работа переменной силы Архимеда. Тогда $Q=-mg(h-y)+F_{A\max}(h-H)+\frac{F_{A\max}+mg}{2}(H-y)$, сгруппировав выражение, получаем

$$Q=-mg\left(h-y-\frac{H-y}{2}\right)+F_{A\max}\left(h-H+\frac{H-y}{2}\right)=$$

$$=-mg\left(h-\frac{H}{2}-\frac{y}{2}\right)+F_{A\max}\left(h-\frac{H}{2}-\frac{y}{2}\right)=\left(F_{A\max}-mg\right)\left(h-\frac{H}{2}-\frac{y}{2}\right)=$$

$$=\left(\rho_{ж}-\rho\right)g\pi R^2H\left(h-\frac{H}{2}-\frac{\rho H}{2\rho_{ж}}\right)=$$

$$=\left(\rho_{ж}-\rho\right)\left(h-\frac{H}{2}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{ж}}\right)\right)g\pi R^2H .$$

Литература.

1.Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями.– М:КДУ,2005.–352с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы.–М.: «Дрофа»,2000.–672с.

Драпезо Леонид Иосифович , ст. преподаватель БНТУ, паспорт МР3299421, выдан заводским РОВД г. Минска 04.06.2013. Адрес ул. Красноармейская 13-86, д.т. 3402265

Погудо Леонид Павлович, ассистент БНТУ, паспорт МР 0606440, московским РОВД Минска 10.08.1999, пр-т. Газеты Правды 60,2, кв.158, д.т. 2716731

Развин Юрий Владимирович, доцент кафедры экспериментальной и теоритической физики БНТУ, д.т. 2900338, ул. Восточная,37-811, паспорт МР0967339, выдан 22.12.2000 Советским РОВД г. Минска