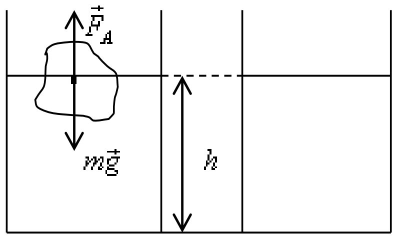
Изменение уровня жидкости в сосуде при различных условиях погружения в нее тающего льда

Петров К.А., Глущенко С.И., Колосовская С.Б., Корбан Н.Р., Развин Ю.В.

Настоящая статья является продолжением публикации «Сила Архимеда и уровень жидкости в сосуде» и ставит целью систематизировать задачи в которых происходит изменения уровня жидкости при таянии льда в сосуде.

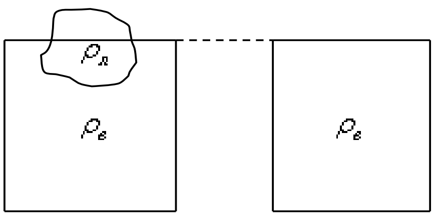
1.а. Задача В сосуде с водой плавает кусок льда. Определите изменение уровня воды в сосуде, когда лед растает.



Решение:

Из условия плавания льда $m_л g = F_A$ или $m_л = \rho_в V_п$, $\rho_в -$ плотность воды, $V_п$ объем погруженной в воду части льда, $V_п = \dfrac{m_л}{\rho_в}(1)$. Объем воды, полученной после таяния льда $V_в = \dfrac{m_л}{\rho_в}(2)$. Как видно из (1) и (2) объемы равны $V_п = V_в$, т.е. объем погруженной в воду части льда будет замещен после таяния льда таким же объемом воды, что означает: уровень воды в сосуде не изменится.

1.б. Задача Рассмотрим другую ситуацию. В сосуде, наполненном до краев водой, плавает кусок льда. Перельется ли вода через край, когда лед растает? Что произойдет, если в сосуде будет находится не вода, а более плотная жидкость или менее плотная жидкость.



Решение:

Объем погруженной в жидкость части льдины $V_n = \frac{m_л}{\rho_ж}(1)$. В случае плавания льдины в пресной воде объем погруженной части V, после таяния льда будет замещен таким же объемом V_n воды. Следовательно, уровень воды не изменится и вода не перельется через край.

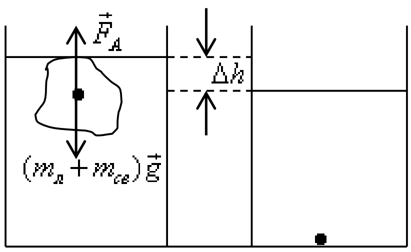
В случае, когда вместо воды в сосуд налита более плотная жидкость

($\rho_ж > \rho_в$), объем погруженной в жидкость льдины уменьшится (1) и после ее таяния, объем полученной воды станет больше объема вытесненной льдиной жидкости, поэтому часть жидкости перельется через край сосуда.

В случае, когда вместо воды в сосуд налита менее плотная жидкость

($\rho_ж < \rho_в$), объем погруженной в жидкость льдины увеличивается (1) и объем полученной воды, после таяния льдины, станет меньше объема вытесненной льдиной жидкости и жидкость через край сосуда не перельется (уровень жидкости в сосуде понизится).

1.в. Задача Внутри плавающего на поверхности воды куска льда находится свинцовая дробинка, определим изменение уровня воды в сосуде. Когда лед растает.

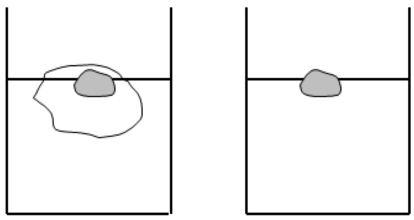


Введем обозначения: объем V куска льда с дробинкой равен сумме объемов льда и свинцовой дробинки $V = V_л + V_{св}$; $\rho_л, \rho_в, \rho_{св}$ – плотности льда, воды и дробинки соответственно, V_n –объем погруженной части куска льда с дробинкой.

Из условия равновесия системы «лед-дробинка» в воде: $(m_л + m_{св})g = F_A$, имеем $\rho_л(V - V_{св}) + \rho_{св}V_{св} = \rho_в V_n(1)$. После таяния льда массой $m_л$ получится объем воды $V_в$, тогда $m_л = \rho_в V_в$ или $\rho_л (V - V_{св}) = \rho_в V_в (2)$. С учетом (2) выражение (1) можно записать в виде: $\rho_в V_в + \rho_{св} V_{св} = \rho_в V_п \Rightarrow V_в = V_п - \dfrac{\rho_{св}}{\rho_в} V_{св}$ (3).

Итак, плавающий лед с дробинкой вытеснял объем воды $V_п$. После таяния льда образовался объем воды $V_в$ и лежащая на дне сосуда с водой дробинка объемом $V_{св}$. С учетом (3) сумма этих объемов $V_в + V_{св} = V_п - V_{св}\dfrac{\rho_{св}}{\rho_в} + V_{св} = V_п - V_{св}\dfrac{\rho_{св} - \rho_в}{\rho_в}$. Так как $\rho_{св} > \rho_в$, то $V_в + V_{св} < V_п$. Следовательно в результате таяния льда уровень воды в сосуде понизится. Если сосуд имеет цилиндрическую форм площадью поперечного сечения S, то уровень воды понизится на величину $\Delta h = \dfrac{V_п - (V_в + V_{св})}{S} = \dfrac{V_{св}(\rho_{св} - \rho_в)}{S\rho_в}$.

1.г. Задача Внутри плавающего на поверхности воды куска льда находится кусочек пробки. Определим изменение уровня воды в сосуде, когда лед растает.

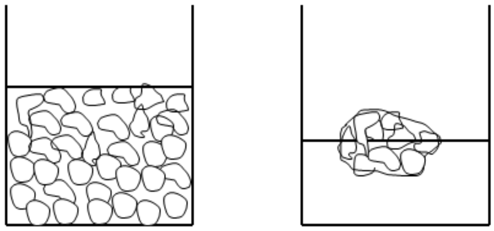


Решение:

Обозначим через $\rho_в, \rho_л, \rho_{пр}$ – плотности воды, льда и пробки соответственно, $V_{пр}$ – объем пробки.

Из выражения (3) задачи 1в разность объемов воды, вытесненной погруженной в воду частью льда с пробкой, и воды, образующейся от таяния льда равна $V_п - V_в = V_{пр}\dfrac{\rho_{пр}}{\rho_в}(1)$. Из условия плавания пробки в воде имеем: $\rho_{пр} V_{пр} = \rho_в V'_п$ ($V'_п$ – часть объема пробки, погруженной в воду). Тогда $V'_п = V_{пр}\dfrac{\rho_{пр}}{\rho_в}(2)$. Из (1) с учетом (2) $V_п = V_в + V_{пр}\dfrac{\rho_{пр}}{\rho_в} = V_в + V'_п$. Таким образом, объем воды, вытесненной куском льда с пробкой, равен сумме объемов воды, образующейся от таяния льда, и воды, вытесненной погруженной частью объема пробки. Следовательно, уровень воды в сосуде не изменится.

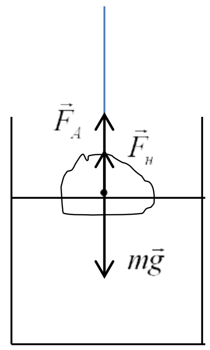
1.д. Задача Цилиндрический стакан заполнен кусочками льда(льдинками) до высоты $h = 10 см$. Промежутки между льдинками сквозные и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают 60% объема. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и промежутков между ними остается неизменным. Определим уровень воды в стакане, после таяния70 % льда.



Решение:

Объем, заполненный льдинками с воздушными промежутками между ними, составляет $V = hS$. В этом объеме собственно льдинки занимают объем $V_л = 0,6hS.$ Масса льда составит $m_л = 0,6\rho_л hS$. Согласно условию растает и превратится в воду масса $m_в = 0,7m_л = 0,42\rho_л hS = \rho_в h_в S.$ Уровень воды после таяния $h_в = 0,42\frac{\rho_л h}{\rho_в}$. В этой воде будет плавать 0,3 массы льда, вытесняя некоторый объем воды и повышая ее уровень на $\Delta h = \frac{0,3m_л}{\rho_в S} = \frac{0,3 \cdot 0,6\rho_л hS}{\rho_в S} = 0,18\frac{\rho_л h}{\rho_в}$. Таким образом уровень воды в стакане $H = h_в + \Delta h = (0,42 + 0,18)\frac{\rho_л h}{\rho_в} = 5,4 см.$

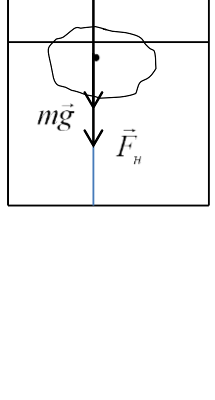
2.а. Задача Кусок льда, подвешенный на нити, погружен в цилиндрический сосуд с водой. Сила натяжения нити $F_н = 1,6H$. Определим, на сколько и как изменится уровень воды в сосуде после того, как лед растает. Площадь дна сосуда $S = 400 см^2$, плотность воды $\rho = 10^3 \frac{кг}{м^3}$.



Решение

Из условия равновесия плавающего на поверхности жидкости тела получим выражение для силы натяжения нити: $F_н = mg - F_A (1)$, где сила тяжести куска льда $mg = \rho_л Vg$, сила Архимеда, действующая на этот кусок льда в воде, $F_A = \rho_в g V_п$ (V и $V_п$ – объемы куска льда и его погруженной в воду части соответственно). С учетом вышесказанного $F_н = (\rho_л V - \rho_в V_п) g (2)$. Из условия, что масса льда равна массе полученной после его таяния воды $m = \rho_л V = \rho_в V_в$. Определим объем полученной воды $V_в = \dfrac{\rho_л}{\rho_в} V (3)$. Изменение уровня воды составит $\Delta h = \dfrac{V_в - V_п}{S} (4)$. Из (2) объем погруженной части куска льда $V_п = \dfrac{\rho_л Vg - F_н}{\rho_в g} (5)$. Объединив (3) и (5) с учетом (4), получим изменение уровня воды в сосуде $\Delta h = \dfrac{F}{\rho_в g S} = 4 мм$, т.е. уровень воды в сосуде повысится.

2.б. Задача Кусок льда привязан нитью ко дну цилиндрического сосуда с водой. Сила натяжения нити $F_н = 1{,}6 H$. Определим, на сколько и как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает. Плотность воды $\rho_в = 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$, площадь дна сосуда $S = 400 см^2$.

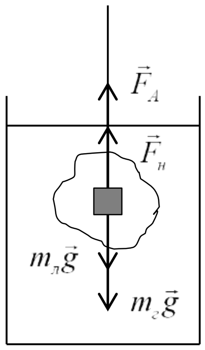


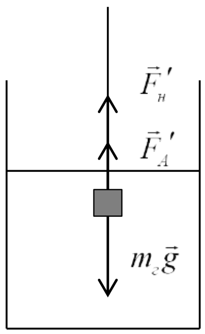
Решение

Из условия равновесия куска льда, сила натяжения нити $F_н = F_A - mg(1)$. Если учесть, что сила Архимеда $F_A = \rho_в g V_п$, сила тяжести $mg = \rho_л V$ (V и $V_п$ – объемы куска льда и его погруженной в воду части), выражение (1) примет вид $F_н = (\rho_в V_п - \rho_л V)g(2)$. Так как масса льда и объем его, а также объем V. Полученной из льда воды связаны соотношением $m = \rho_л V = \rho_в V_в$, то объем полученной из льда воды $V_в = \frac{\rho_л}{\rho_в}V(3)$. Уровень воды в сосуде изменится на величину $\Delta h = \frac{V_в - V_п}{S}(4)$. Объем погруженной в воду части куска льда определим из (2): $V_п = \frac{F_н + \rho_л V g}{\rho_в g}(5)$. Подставим в (4) выражения (3) и (5), получим изменение уровня воды в сосуде $\Delta h = -\frac{F}{\rho_в g S}$ или $\Delta h = -4,0 мм$. Знак

«–» свидетельствует, что уровень воды понизится.

3.а. Задача В цилиндрическом сосуде с водой на нити подвешена гайка, вмороженная в кусок льда. Лед с гайкой полностью погружен в воду и не касаются стенок и дна сосуда. После того, как лед растаял, гайка осталась висеть на нити, целиком погруженная в воду. Уровень воды в сосуде за время таяния льда уменьшился на $\Delta h =$ 1,7 мм , а сила натяжения нити увеличилась в $k = 4$ раза. Определим объем гайки. Плотность волы $\rho_в = 10^3 \frac{кг}{м^3}$, материала гайки $\rho = 7800 \frac{кг}{м^3}$, площадь внутреннего сечения сосуда $S = 75 см^2$.



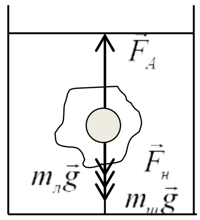


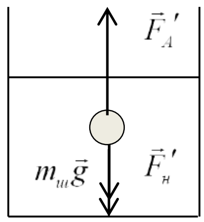
Из условия равновесия для системы (лед-гайка-вода) сила натяжения нити $F_н = (m_г + m_л)g - F_A (1)$. После таяния льда сила натяжения нити становится равной $F_н' = m_г g - F_A' (2)$. В этих выражениях $m_г g = \rho_г g V_г$ и $m_л g = \rho_л g V_л$ силы тяжести гайки и куска льда, $V_г$ и $V_л$ –объемы гайки и льда, соответственно. $F_A = \rho_в g(V_г + V_л)$ – сила Архимеда, действующая на лед с гайкой до таяния льда. $F_A' = \rho_в g V_г$ – сила Архимеда, действующая на гайку после таяния льда.

Поделив почленно (2) на (1), с учетом вышесказанного, получим $\frac{F_н'}{F_н} = k = \frac{\rho_г V_г - \rho_в V_г}{\rho_г V_г + \rho_л V_л - \rho_в (V_г + V_л)} = \frac{(\rho_г - \rho_в)V_г}{(\rho_г - \rho_в)V_г - (\rho_в - \rho_л)V_л}$. Из этого выражения объем гайки $V_г = \frac{k(\rho_в - \rho_л)V_л}{(k-1)(\rho_г - \rho_в)} (3)$.

Объем куска льда определим следующим образом. Если $S\Delta h$ – объем, на который уменьшился объем воды в сосуде, равен разности объемов куска льда ($V_л$) и полученной из него воды ($V_в$), т.е. $S\Delta h = V_л - V_в = V_л(1 - \frac{V_в}{V_л})$. Из условия, что $m_л = \rho_л V_л = \rho_в V_в$, получим $\frac{V_в}{V_л} = \frac{\rho_л}{\rho_в}$. Тогда $S\Delta h = V_л(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}) \Rightarrow V_л = \frac{S\Delta h \rho_в}{\rho_в - \rho_л} (4)$. Подставив (4) в (3), получим объем гайки $V_г = \frac{k(\rho_в - \rho_л)S\Delta h \rho_в}{(\rho_в - \rho_л)(k-1)(\rho_г - \rho_в)} = \frac{kS\Delta h \rho_в}{(k-1)(\rho_г - \rho_в)}$ или $V_г = 2,5 см^3$.

3.б. Задача Внутри цилиндрического сосуда с водой удерживается с помощью нити деревянный шарик, вмороженный в кусок льда. Нить крепится ко дну, а лед с шариком целиком погружен в воду и не касается стенок и дна сосуда. После того как лед растаял, шарик так и остался целиком погруженный в воду. Сила натяжения нити за время таяния льда уменьшилась в $k=3$раза, а уровень жидкости в сосуде уменьшился на $\Delta h = 1,4 мм$. Определим объем шарика. Плотности воды $\rho_в = 10^3 \frac{кг}{м^3}$, деревянного шарика $\rho = 0,6 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$, площадь внутреннего сечения сосуда $S = 80 см^2$.





Решение:

Из условия равновесия для системы «лед-шарик-вода», сила натяжения нити до таяния льда равна $F_н = F_A - (m_л + m_ш)g$ или $F_н = \rho_в(V_л + V_ш)g - (\rho_л V_л + \rho_ш V_ш)g.$ Преобразуем это выражение к виду $F_н = V_л(\rho_в - \rho_л)g + V_ш(\rho_в - \rho_ш)g(1)$ ($V_л$ и $V_ш -$ объемы куска льда и шарика, соответственно). После того, как лед растаял, сила натяжения нити стала равной $F_н' = F_A' - mg = V_ш(\rho_в - \rho_ш)g(2)$ Поделим (1) на (2) почленно $\frac{F_н}{F_н'} = k = \frac{V_л(\rho_в - \rho_л)g + V_ш(\rho_в - \rho_ш)g}{V_ш(\rho_в - \rho_ш)} = \frac{V_л(\rho_в - \rho_л)}{V_ш(\rho_в - \rho_ш)} + 1(3)$. Если учесть, что масса растаявшего льда $m_л = \rho_л V_л = \rho_в V_в$, то объем полученной воды $V_в = \frac{m_л}{\rho_в} = \frac{\rho_л}{\rho_в} V_л$.

Объем полученной от таяния льда воды меньше объема льда на величину $\Delta V = V_л - V_в = V_л(1-\frac{V_в}{V_л}) = V_л(1-\frac{\rho_л}{\rho_в})$. Согласно условию задачи $\Delta V = S\Delta h = V_л(1-\frac{\rho_л}{\rho_в})$ и объем льда $V_л = \frac{S\Delta h\rho_в}{\rho_в-\rho_л}(4)$ Из выражения (3) с учетом (4) объем шарика $V_ш = \frac{V_л(\rho_в-\rho_л)}{(k-1)(\rho_в-\rho)} = \frac{S\Delta h\rho_в}{(k-1)(\rho_в-\rho)}$ или $V_ш = 14см^3$.

Литература.

1.Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями.–М:КДУ,2005.–352с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы.–М.: «Дрофа»,2000.–672с.