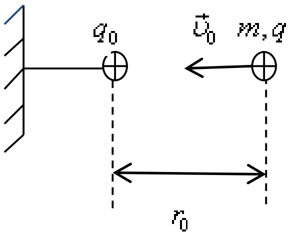
Движение и взаимодействие одноименно заряженных частиц

Петров К.А. , Развина Т.И., Развин Ю.В. , Соколова С.Н.

Анализ выполнения заданий централизованного тестирования по физике показывает, что учащиеся испытывают значительные трудности при решении задач, основанных на комплексном применении законов механики и электромагнетизма. В настоящей работе проведен анализ решения ряда задач, в условиях которых представлено движение заряженных частиц относительно друг друга.

Задача 1а. Частица массой m =1г с зарядом q = 1 мкКл движется к закрепленному одноименно заряду q_0 = 2 мкКл. На расстоянии r_0 = 10 см от заряда скорость частицы υ_0 = 30 м/с. Определим минимальное расстояние, на которое частица приблизится к закрепленному заряду. Сопротивлением воздуха и гравитационным взаимодействием пренебречь.

Решение



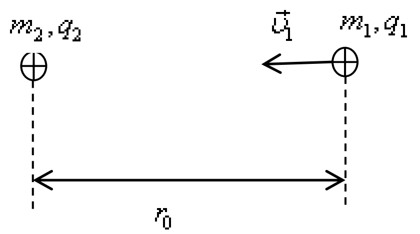
Двигаясь в электрическом поле одноименно заряда q_0, частица приближается к заряду на некоторое минимальное расстояние $r_{\min}$ и останавливается. Система «частица» – «закрепленная частица» является замкнутой. Для определения расстояния $r_{\min}$ воспользуемся законом сохранения энергии: $\frac{m\upsilon_0^2}{2}+\frac{kq_0q}{r_0}=\frac{kq_0q}{r_{\min}}$, где $\frac{m\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия частицы, $\frac{kq_0q}{r_0}$ и $\frac{kq_0q}{r_{\min}}$ – начальная и конечная энергии взаимодействия заряда q_0 и заряженной частицы q.

Покажем несколько нетрадиционный подход к расчету минимального расстояния $r_{\min}$ между частицами.

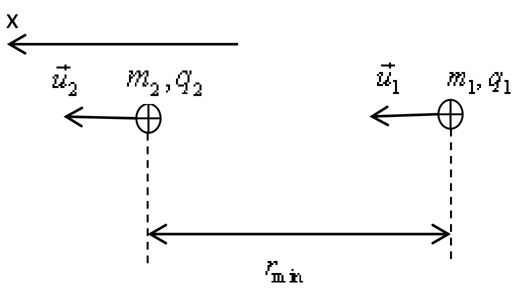
$$\frac{kqq_0(r_0-r_{\min})}{r_0r_{\min}}=\frac{m\upsilon^2}{2}\Rightarrow\frac{r_{\min}}{r_0-r_{\min}}=\frac{2kqq_0}{mr_0}=0,4\Rightarrow r_{\min}=\frac{0,4r_0}{1,4}\approx 3см$$

1б. Изменим условие задачи. Пусть частица массой m_1 и зарядом q_1 движется со скоростью υ_1 из бесконечности к покоящейся вначале частице массой m_2 и зарядом q_2. Определим в данном случае минимальное расстояние $r_{\min}$ между заряженными частицами.

Решение



По мере приближения первой заряженной частицы ко второй, вторая начинает движение по направлению от первой. Минимальное расстояние между частицами будет в тот момент, когда относительная скорость частиц станет равной нулю, т.е. скорости частиц будут направлены в одну сторону и равны по величине $(u_1 = u_2 = u)$.



Воспользуемся законом сохранения импульса в проекции на ось Ох:

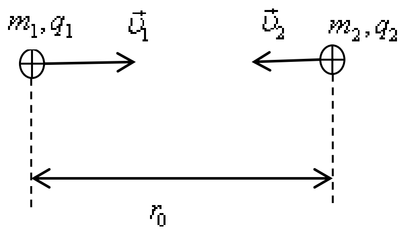
$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u = p$ (импульс системы $p = const$).

Воспользуемся законом сохранения энергии: $\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{(m_1+m_2)u^2}{2} + \dfrac{kq_1q_2}{r_{\min}}$

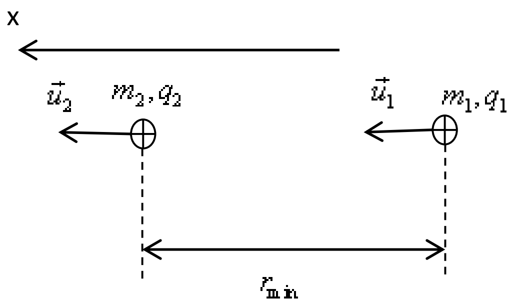
или $\dfrac{p^2}{2m_1} = \dfrac{p^2}{2(m_1+m_2)} + \dfrac{kq_1q_2}{r_{\min}}$. Отсюда $r_{\min} = \dfrac{2kq_1q_2m_1(m_1+m_2)}{p^2m_2} = \dfrac{2kq_1q_2(m_1+m_2)}{m_1m_2\upsilon_1^2}$.

$$[r] = \frac{Нм^2Кл^2кг\cdot c^2}{Кл^2кг^2м^2} = \frac{кг\cdot м\cdot c^2}{c^2\cdot кг} = м$$

1.в. Рассмотрим случай, когда эти две одноименно заряженные частицы ($m_1 > m_2$)движутся навстречу друг другу со скоростями υ_1и υ_2, соответственно Первоначальное расстояние между ними r_0. Определим минимальное расстояние на которое сблизятся частицы.



В процессе движения мгновенные силы кулоновского отталкивания будут равны. Из второго закона Ньютона следует, что модуль мгновенного ускорения будет больше у частицы меньшей массы. На некотором расстоянии r ее скорость становится равной нулю, и она начинает движение в противоположном направлении, совпадающим с направлением движения первой частицы.



В момент времени, когда скорости частиц станут одинаковыми

($u_1 = u_2 = u$), т.е. их относительная скорость частиц станет равной нулю, расстояние между частицами станет минимальным. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось Ox: $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u$

Закон сохранения энергии будет иметь вид:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{r_0} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{r_{\min}} \Rightarrow \frac{kq_1q_2(r_0 - r_{\min})}{r_0 r_{\min}} = \frac{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 - (m_1+m_2)u^2}{2}.$$

$$\frac{r_0 - r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{r_0(m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 - (m_1+m_2)u^2)}{2kq_1q_2}$$

Если

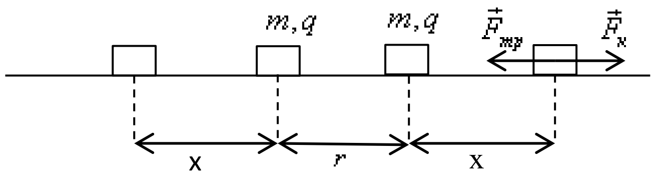
$m_1 = 2\cdot 10^{-3} кг, m_2 = 10^{-3} кг, \upsilon_1 = 5\frac{м}{с}, \upsilon_2 = 4\frac{м}{с}, q_1 = 2\cdot 10^{-6} Кл, q_2 = 10^{-6} Кл, r_0 = 10 м,$ то $u = 2\frac{м}{с}$.

$\frac{r_0 - r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{10(2\cdot 10^{-3}\cdot 25 + 10^{-3}\cdot 16 - 3\cdot 10^{-3}\cdot 4)}{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-12}} = 15$. Тогда $r_{\min} = 0,625$ м=62,5 см

2а. Два тела с зарядом $q = 10 мкКл$ и массой $m = 5 г$ каждое удерживают на горизонтальной поверхности на расстоянии $r = 1 м$ друг от друга. Тела отпускают, и они начинают скользить по поверхности, коэффициент трения о которую μ=0,5. Определим максимальную скорость, которую разовьют тела, и расстояние, которое они пройдут до остановки.

Решение

В начальный момент сила кулоновского отталкивания $F_к = \frac{kq^2}{r^2}$ больше, чем максимальная сила трения $F_{тр} = \mu mg (F_к > F_{тр_{\max}})$. Поэтому, как только тела освобождают, они начинают двигаться ускоренно до тех пор, пока сила кулоновского отталкивания не станет равна силе трения по модулю.



В этот момент времени ускорение становится равным нулю (a=0), а скорость каждого тела – максимальной ($\upsilon_{\max}$). Для определения этой скорости воспользуемся теоремой об изменении энергии системы:

$$\frac{kq^2}{r+2x} + 2\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} - \frac{kq^2}{r} = -2\mu mgx (1) \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{kq^2 2x}{mr(r+2x)} - 2\mu gx}.$$

Где $\frac{kq^2}{r+2x}$ – потенциальная энергия электрического взаимодействия тел на расстоянии $(r+2x)$; $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия каждого тела на расстоянии $(r+2x)$ друг от друга; $\frac{kq^2}{r}$ – начальная потенциальная энергия электрического взаимодействия тел на расстоянии r; $-\mu mgx$ – работа силы трения, действующей на каждое тело при прохождении расстояния x.

Определим $(r+2x)$ и $2x$ из условия, что сила кулоновского взаимодействия равна силе трения $\frac{kq^2}{(r+2x)^2}=\mu mg \Rightarrow r+2x=\sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}}; 2x=\sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}}-r$

Чтобы не усложнять расчеты, сразу определим $r+2x=6м, 2x=5м; \upsilon_{\max}\approx 13,2\frac{м}{с}$.

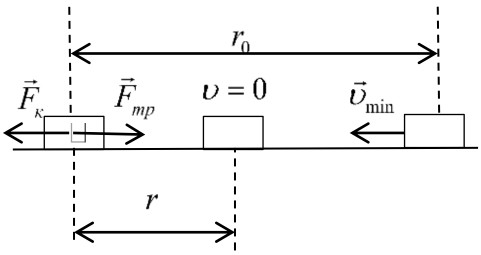
Для определения расстояния S, после прохождения которого тела остановятся, также воспользуемся теоремой об изменении энергии и запишем: $\frac{kq^2}{r+2S}-\frac{kq^2}{r}=-2\mu mgS \Rightarrow \frac{kq^2}{r(r+2S)}=\mu mg.$

Тогда $r+2S=\frac{kq^2}{\mu mgr} \Rightarrow S=\frac{kq^2}{2\mu mgr}-\frac{r}{2}$.

$$[S]=\frac{Н\cdot м^2 Кл^2}{Кл^2 м\cdot Н}=м.$$
$$S=17,5м.$$

2б. Изменим условие предыдущей задачи. Пусть два тела находятся на расстоянии $r_0=10м$ друг от друга. Определим минимальную скорость, которую нужно сообщить одному из тел, чтобы второе тело сдвинулось с места.

Расчет показывает, что в начальный момент времени сила трения покоя больше силы кулоновского отталкивания. Поскольку частицы одноименно заряженные, то очевидно, что скорость необходимо сообщить одному телу в направлении ко второму. Когда оно окажется на некотором расстоянии r от второго тела, сила кулоновского отталкивания, действующая на второе тело, станет равной силе трения и в этот момент оно сдвинется с места. Так как требуется определить минимальную скорость, сообщаемую первому телу, чтобы сдвинуть второе, то считаем, что первое тело в этот момент остановится. Это случится на некотором расстоянии r между телами.



Определим это расстояние из условия равенства:

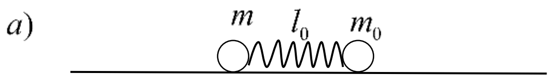
$$\mu mg = \frac{kq^2}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}} = 6м.$$

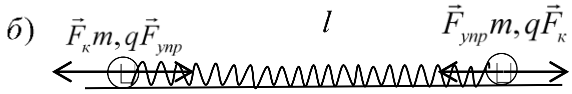
И вновь воспользуемся теоремой об изменении энергии системы:

$$\frac{kq^2}{r} - \frac{kq^2}{r_0} - \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} = -\mu mg(r_0 - r)\ .$$

Определим минимальную скорость $\upsilon_{\min} = \sqrt{\dfrac{2(r_0 - r)(kq^2 + \mu mgrr_0)}{mrr_0}} = 8\dfrac{м}{с}$.

3а. Перейдем к рассмотрению взаимодействия двух маленьких шариков массой m=150г каждое, соединенных непроводящей недеформированной пружиной длиной $l_0 = 50см$, жесткостью $k = 10\dfrac{Н}{м}$. После сообщения шарикам одинаковых зарядов длина пружины становится $l = 100см$. Определим минимальную скорость, которую надо сообщить каждому шарику, чтобы они смогли сблизится до прежнего расстояния l_0.





При сообщении шарикам одинаковых зарядов на каждый из них начинают действовать сила упругости со стороны пружины и сила кулоновского отталкивания. Момент времени, когда эти две силы становятся равными, соответствует максимальному растяжению пружины до длины l. Поверхность гладкая – силы трения отсутствуют. Силы упругости и кулона являются потенциальными (консервативными), следовательно можем воспользоваться законом сохранения энергии:

$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}+2\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}+\frac{k(l-l_0)^2}{2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}(1)$, где $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$ и $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$ –начальная и конечная энергии электрического взаимодействия шариков; $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}$ –минимальная кинетическая энергия, сообщаемая каждому шарику(т.к. имеется в виду минимальная скорость, сообщаемая шарикам, то конечная кинетическая энергия их должна стать равной нулю); $\frac{k(l-l_0)^2}{2}$ – потенциальная энергия упругодеформированной пружины в начальный момент времени.

Заряды, сообщаемые шарикам неизвестны. Определим их из условия, что при растяжении пружины до длины l, силы упругости и кулона становятся равными: $k(l-l_0)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\Rightarrow\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}=kl^2(l-l_0)(2).$

Преобразуем выражение (1) к виду: $m\upsilon_{\min}^2=\frac{q^2(l-l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l l_0}-\frac{k\left(l-l_0\right)^2}{2}.$

Воспользуемся выражением (2) получим $\upsilon_{\min}=\sqrt{\frac{kl(l-l_0)^2}{mll_0}-\frac{k(l-l_0)^2}{2m}}=(l-l_0)\sqrt{\frac{k(2l-l_0)}{2ml_0}}.$ $\upsilon_{\min}=5\frac{м}{с}$.

3б. Теперь представим, что после сообщения одинаковым шарикам, соединенным непроводящей недеформированной пружиной, длиной $l_0=8см$, заряда $q=1мкКл$ каждому, шарики приходят в колебательное движение на горизонтальной поверхности. Постепенно колебания прекращаются, длина пружины остается равной $l=10см.$Определим количество энергии, перешедшей в тепло, при затухании колебаний.

В начальный момент времени система обладает потенциальной энергией электрического взаимодействия шариков $W_{\mathrm{I}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$.

После прекращения колебаний энергия системы станет равной сумме потенциальных энергий электрического взаимодействия шариков и упруго деформированной пружины. $W_{\mathrm{II}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{k(l-l_0)^2}{2}$.

Количество энергии Q, перешедшей в тепло, в этих затухающих колебаниях определится разностью энергий начального и конечного состояний системы: $Q = W_{\mathrm{I}} - W_{\mathrm{II}}$ или

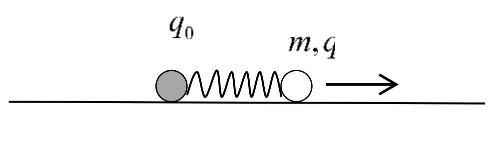
$$Q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{k(l-l_0)^2}{2} = \frac{q^2(l-l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l_0 l} - \frac{k(l-l_0)^2}{2} \quad (1)$$

Для нахождения коэффициента жесткости пружины k воспользуемся конечным состоянием системы, когда сила кулоновского отталкивания становится равной силе упругости: $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = k(l-l_0) \Rightarrow k = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2(l-l_0)}$ (2)

Подставим (2) в (1), получим: $Q = \frac{q^2(l-l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l_0 l} - \frac{q^2(l-l_0)^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2(l-l_0)} = \frac{q^2(l-l_0)(2l-l_0)}{8\pi\varepsilon_0 l_0 l^2}$.

Расчет показал, что в тепло перешло $Q = 0{,}135\,Дж$ энергии.

3в. Рассмотрим два заряженных шарика, соединенных непроводящей пружиной и расположенных на гладкой горизонтальной поверхности. Шарик с зарядом $q_0 = 1\,мкКл$ закреплен, шарик массой $m = 10\,г$ и зарядом $q = 2\,мкКл$ подвижен и колеблется так, что минимальная длина пружины составляет $l_1 = 10\,см$, а длина ее в недеформированном состоянии $l_0 = 30\,см$. Определим максимальную скорость движения колеблющегося шарика, если в этот момент, длина пружины $l_2 = 40\,см$.



Данная система замкнутая, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2-l_0)^2}{2} + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1-l_0)^2}{2} \quad (1)$$

В этом выражении левая часть представляет сумму энергий: электрического взаимодействия заряженных шариков, упругой деформации пружины и максимальной кинетической энергии шарика соответственно. Правая часть – сумма энергий системы в состоянии максимальной деформации пружины: энергия электрического взаимодействия заряженных шариков на расстоянии l_1 и потенциальная энергия упругой деформации пружины соответственно.

Из выражения (1):

$$\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}=\frac{q_1q_2(l_2-l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_1 l_2}+\frac{k}{2}((l_1-l_0)^2-(l_2-l_0)^2)=\frac{q_1q_2(l_2-l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_1 l_2}+\frac{k}{2}(l_1^2-2l_0(l_1-l_2)-l_2^2)(2)$$

Жесткость пружины определим из условия задачи: скорость шарика максимальна, когда его ускорение равно нулю, что означает на расстоянии l_2 силы кулоновского отталкивания и упругости становятся равными:

$k(l_2-l_0)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2}\Rightarrow$ жесткость пружины $k=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2(l_2-l_0)}(3)$.Подставив (3) в (2), определим максимальную скорость каждого шарика:

$$\upsilon_{\max}=\sqrt{\frac{q_1q_2(l_2-l_1)}{2\pi\varepsilon_0 m l_1 l_2}+\frac{q_1q_2(l_1^2-2l_0(l_1-l_2)-l_2^2)}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2(l_2-l_0)m}}=\sqrt{\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}(\frac{l_2-l_1}{l_1l_2}+\frac{l_1^2-2l_0(l_1-l_2)-l_2^2}{2l_2^2(l_2-l_0)}}),$$

$$\upsilon_{\max}=5,5\frac{м}{с}.$$

Литература.

1.Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями.– М:КДУ,2005.–352с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы.–М.: «Дрофа»,2000.–672с.

3. Развина Т.И. Физика. Электродинамика. –Минск.: БНТУ, 2011.–389с.