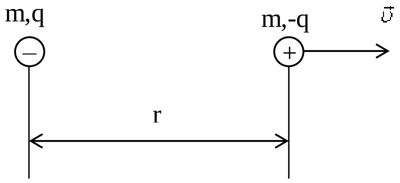
Движение и взаимодействие разноименно заряженных частиц

Петров К.А., Развина Т.И., Развин Ю.В., Чертина М.И.

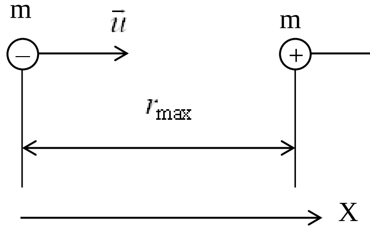
Настоящая статья является продолжением [1] и ставит целью систематизировать особенности движения и взаимодействия разноименно заряженных частиц.

Начнем с рассмотрения движения разноименно заряженных частиц по горизонтали. Между частицами действует только сила кулоновского притяжения.

Задача 1. Две частицы массой $m = 2г$ каждая, с зарядами $q_1 = 2мкКл$ и $q_2 = -2мкКл$, закреплены на расстоянии $r = 3м$. Одной из частиц сообщают скорость $\upsilon = 4\frac{м}{с}$. Определите максимальное расстояние между частицами в процессе их движения.



Между разноименнозаряженными частицами действуют силы кулоновского притяжения. Поэтому, как только начала двигаться одна частица, тут же приходит в движение другая. Она движется с ускорением вслед за первой, в то время, как первая движется замедленно. Когда относительная скорость частиц станет равной нулю, т.е. скорости частиц станут одинаковыми по величине и направлению, расстояние между разноименно заряженными частицами будет максимальным.

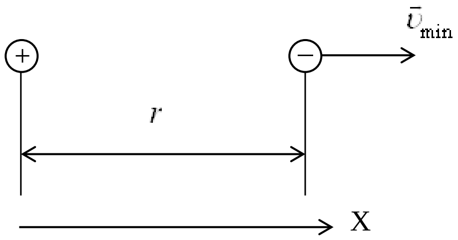


К этой замкнутой системе применим законы сохранения импульса в проекции на ось Ох: $m\upsilon = 2mu (1);$ и энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{kq^2}{r}=\frac{2mu^2}{2}-\frac{kq^2}{r_{\max}}\Rightarrow\frac{kq^2}{r_{\max}}=\frac{2mu^2}{2}-\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{kq^2}{r}\Rightarrow r_{\max}=\frac{2kq^2r}{(2mu^2-m\upsilon^2)r+2kq^2}$$ или

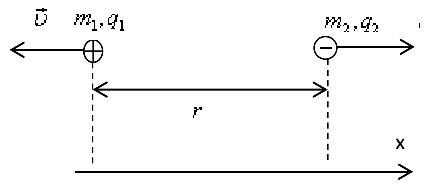
максимальное расстояние между частицами $r_{\max}$ =9м.

Задача 2. Пусть две частицы (см. условие предыдущей задачи) расположены на расстоянии $r=2м$. Определим минимальную скорость υ, которую необходимо сообщить одной из частиц, чтобы они не столкнулись.

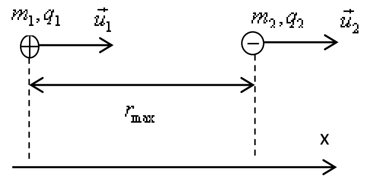


Решение аналогично решению предыдущей задачи. Следует только учесть, что частицы не смогут столкнуться только при условии отсутствия между ними электрического взаимодействия, т.е. между ними должно быть бесконечно большое расстояние. Для данной замкнутой системы закон сохранения энергии запишется в виде: $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}-\frac{kq^2}{r}=\frac{2mu^2}{2}(1)$, где $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}$ – минимальная кинетическая энергия, которую следует сообщить одной из частиц, чтобы вторая не успела ее догнать; $-\frac{kq^2}{r}$ – начальная потенциальная энергия взаимодействия заряженных частиц; $\frac{2mu^2}{2}$ – кинетическая энергия частиц на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Когда частицы будут двигаться с одинаковой скоростью $\vec{u}$, между ними будет бесконечно большое расстояние. Эту скорость определим из закона сохранения импульса: $m\upsilon_{\min}=2mu\Rightarrow u=\frac{\upsilon_{\min}}{2}(2)$ Подставим (2) в (1): $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{4}=\frac{kq^2}{r}$ и определим минимальную скорость, сообщенную телу $\upsilon_{\min}=\sqrt{\frac{4kq^2}{mr}}$ или $\upsilon_{\min}=6\frac{м}{с}$.

Задача 3. Двум частицам массами $m_1=4г$ и $m_2=5г$ каждая и с зарядами $q_1=3мкКл$ и $q_2=-6мкКл$, расположенным на расстоянии $r=6м$ друг от друга, сообщают одинаковые скорости $\upsilon=2\frac{м}{с}$. Определим в этом случае максимальное расстояние между частицами при их относительном движении.



Подход к решению аналогичен предыдущим задачам: максимальное расстояние между частицами будет в тот момент, когда их относительная скорость станет равной нулю, т.е. скорости частиц будут равны и направлены в одну сторону. Анализ движения позволяет сказать, что мгновенные силы кулона, действующие на частицы равны. Следовательно, частица с малой массой будет двигаться с большим по модулю мгновенным ускорением до остановки. После чего она разворачивается и уже ускоренно движется вслед за другой частицей, скорость которой продолжает уменьшаться. Как только скорости частиц $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ будут сонаправлены и равны ($u_1 = u_2 = u$), расстояние между частицами станет максимальным ($r_{\max}$).



Поскольку система частиц – замкнутая, то для определения этого расстояния воспользуемся законами сохранения импульса в проекции на ось Ох: $-m_1\upsilon + m_2\upsilon = (m_1+m_2)u_x \Rightarrow u_x = \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon (1)$, и энергии

$$-\frac{kq_1|q_2|}{r} + \frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2} = -\frac{kq_1|q_2|}{r_{\max}} + \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} \Rightarrow \frac{kq_1|q_2|}{r_{\max}} = \frac{kq_1|q_2|}{r} + \frac{(m_1+m_2)(u^2-\upsilon^2)}{2} (2)$$

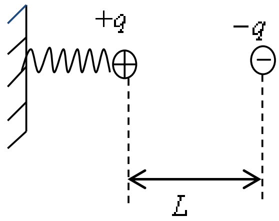
Подставим (1) в (2), получим:

$$\frac{kq_1|q_2|}{r_{\max}} = \frac{kq_1|q_2|}{r} + \frac{(m_2-m_1)^2-(m_1+m_2)^2}{2(m_1+m_2)}\upsilon^2 = \frac{kq_1|q_2|}{r} - 2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon^2 (3)$$

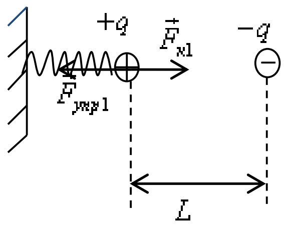
Из (3) получим: $r_{\max} = \dfrac{kq_1|q_2|r(m_1+m_2)}{kq_1|q_2|(m_1+m_2) - 2m_1m_2r\upsilon^2}$, $r_{\max} \approx 17,6\,м$

Рассмотрим взаимодействие разноименно заряженных частиц, одна из которых закреплена на горизонтальной невесомой пружине. В данном случае в системе между частицами действуют силы кулоновского притяжения и со стороны пружины на одну из частиц действует сила упругости.

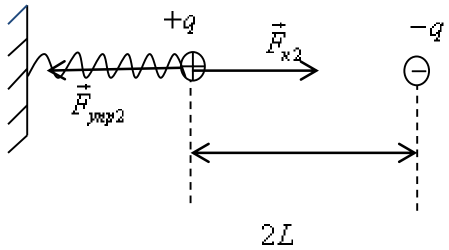
Задача 4. Маленький шарик с зарядом +q закреплен на невесомой горизонтальной пружине жесткостью k, как показано на рисунке. На расстоянии L удерживают шарик с зарядом –q. Пренебрегая силой тяжести шариков, определим работу, которую необходимо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между шариками вдвое.



Работа по медленному (равномерному) изменению расстояния между заряженными шариками определится изменением энергии системы этих двух шариков и пружины $A = \Delta W = W_{\text{II}} - W_{\text{I}}$, где W_{I} и W_{II} – энергии системы до и после увеличения расстояния между шариками от L до 2L соответственно.



I



II

Полная энергия системы в первом и во втором состояниях определяется суммой потенциальных энергий взаимодействия заряженных частиц и упругой деформации пружины.

$$W_{\mathrm{I}} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{kx_1^2}{2}(1);\quad W_{\mathrm{II}} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{kx_2^2}{2}(2)$$ (x_1 и x_2 – линейное изменение длины пружины в начальном и конечном состояниях).

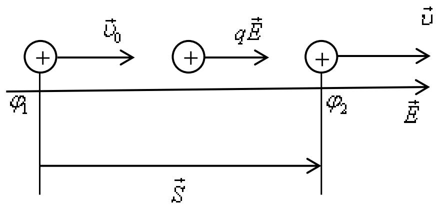
Поскольку потенциальная энергия упругой деформации пружины в конечном виде $W_{упр} = \frac{kx^2}{2} = \frac{F_{упр}^2}{2k}$, а из рисунка видно, что $F_{упр} = kx = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, то эта энергия $W_{упр} = \frac{1}{2k}(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2})$, где x – изменение длины пружины при расстоянии между шариками r. В данном случае выражения (1) и (2) примут вид:

$$W_{\mathrm{I}} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{1}{2k}(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2})^2(1'), W_{\mathrm{II}} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{1}{2k}(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4L^2})^2(2')$$

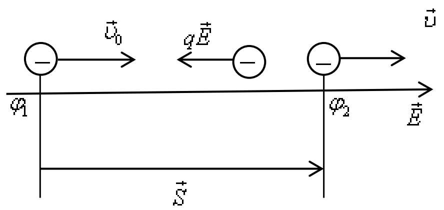
Тогда

$$A = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{1}{2k}((\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2})^2 - (\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2})^2) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L} - \frac{15q^4}{2k(16\pi\varepsilon_0 L^2)^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}(1 - \frac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 kL^3})$$

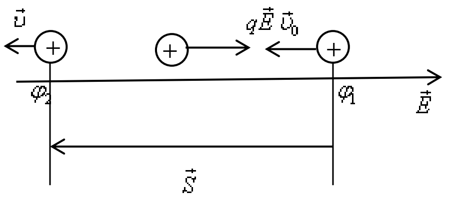
Рассмотрим движение заряженных частиц в горизонтальном однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$. При этом, как правило, пренебрегают силой тяжести, и связывают следующие величины: перемещение $\vec{S}$, начальную ($\vec{\upsilon}_0$) и конечную ($\vec{\upsilon}$) скорости частицы, а также потенциалы ее начального и конечного положений.



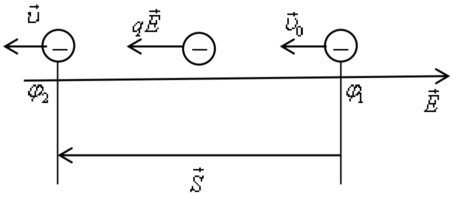
а)



б)



в)



г)

На рисунках указаны направления линий напряженности $\vec{E}$ однородного электрического поля и скоростей частицы. При решении задач подобного типа необходимо воспользоваться теоремой о кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела равно работе результирующей силы, действующей на тело. $\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=qES=q(\varphi_1-\varphi_2)=qU$ (1)

, где $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$ и $\frac{m\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергии частицы в начальном и конечном положениях; $qES=A$ – работа результирующей силы при перемещении частицы на расстояние S; φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек поля; $\varphi_1-\varphi_2=U$ –разность потенциалов точек (напряжение).

Проанализируем характер движения частицы. Для случая а: $q>0$, $\varphi_1>\varphi_2$ (потенциал электрического поля вдоль линий поля понижается), следовательно $\upsilon>\upsilon_0$: положительная частица движется вдоль линий поля с ускорением($\vec{\upsilon}_0\uparrow\uparrow\vec{E}$).

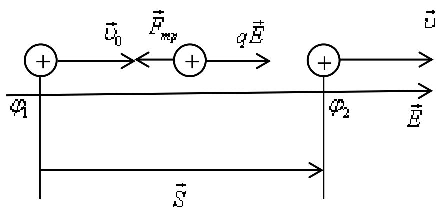
Случай б: $q<0$, $\varphi_1>\varphi_2$,скорость частицы уменьшается: отрицательно заряженная частица движется вдоль линий поля замедленно($\vec{\upsilon}_0\uparrow\uparrow\vec{E}$).

Случай в: $q>0$, $\varphi_1<\varphi_2$, следовательно $\upsilon<\upsilon_0$, положительно заряженная частица движется против линий поля замедленно($\vec{\upsilon}_0\downarrow\uparrow\vec{E}$).

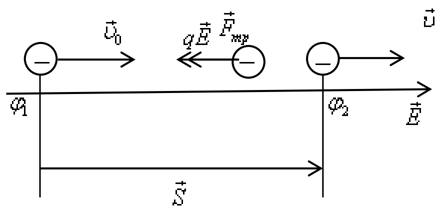
Случай г: $q < 0$, $\varphi_1 < \varphi_2$, следовательно $\upsilon > \upsilon_0$, отрицательно заряженная частица движется против линий поля ускоренно($\vec{\upsilon}_0 \downarrow\uparrow \vec{E}$).

Из анализа характера движения видно, что случай а подобен случаю г, случай б, подобен случаю в: положительно заряженная частица движется ускоренно вдоль линий поля, отрицательно заряженная частица – против; отрицательно заряженная частица движется замедленно вдоль линий поля, положительно заряженная – против.

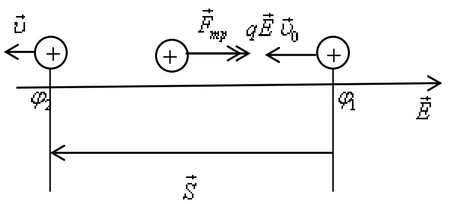
Усложним условие предыдущей задачи, рассмотрев движение заряженной частицы в однородном электрическом поле по горизонтальной шероховатой поверхности, коэффициент трения о которую μ.



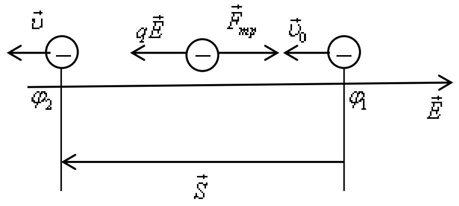
а)



б)



в)

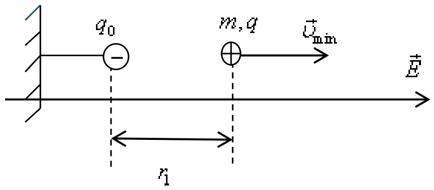


г)

Используя теорему о кинетической энергии $\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = (qE \pm F_{тр})S$, где $(qE \pm F_{тр}) = F_{рез}$ – результирующая сила, действующая на частицу в процессе движения ($F_{тр} = \mu mg$).

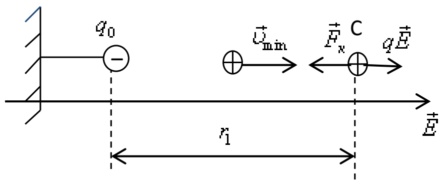
Для случаев а и г: $\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = (|q|E - \mu mg)S$; для случаев б и в: $\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = -(|q|E + \mu mg)S$. В случаях а и г наблюдается ускоренное движение; в случаях б и в – замедленное. Из приведенных выше выражений можно определить любой параметр движения: скорость частицы до и после перемещения, перемещение, заряд частицы, величину напряженности электрического поля, массу частицы и коэффициент трения.

Рассмотрим движение частицы $m = 0{,}1 г$ с зарядом $q = 2 мкКл$ в однородном внешнем электрическом поле напряженностью $E = 100\frac{В}{м}$ при наличии закрепленного заряда противоположного знака $q_0 = -100 нКл$, на расстоянии $r_1 = 1 м$ от удерживаемой частицы.



Пренебрегая силой тяжести, определим минимальную скорость, которую необходимо сообщить частице, чтобы она улетела в бесконечность.

Решение: Если сравнить силы, действующие в начальный момент на частицу: кулоновского притяжения ($F_{к0} = k\frac{|q_0|q}{r_1^2}$)и электрическую со стороны поля (qE), – видно, что первая больше второй. Чтобы частица улетела в бесконечность необходимо добиться того, чтобы, она пролетела точку С. В которой сила Кулона становиться равной электрической силе, т.е. $k\frac{|q_0|q}{r_1^2} = qE \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{k|q_0|}{E}} = 3м$



Точка С находится на расстоянии $r_2 = 3м$ от закрепленного заряда q_0. Для нахождения минимальной скорости, при которой частица попадает в точку С воспользуемся теоремой об изменении энергии: $W_{\text{II}} - W_{\text{I}} = A_{\substack{внешней\\силы}}$

Для данного случая: $-k\frac{|q_0|q}{r_2} - (-k\frac{|q_0|q}{r_1} + \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}) = qE(r_2 - r_1) \Rightarrow \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} = k\frac{|q_0||q|(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} - qE(r_2 - r_1)$

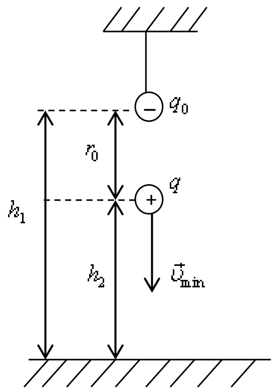
Минимальная скорость, сообщаемая частице $\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{2q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}(k|q_0| - Er_1 r_2)}$.

Подставив численные значения, $\upsilon_{\min} = 4\frac{м}{с}$.

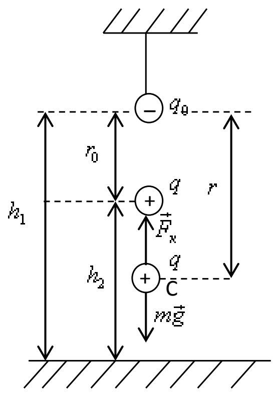
Рассмотрим движение заряженной частицы в гравитационном поле Земли.

Частица массой $m = 0{,}9г$ с зарядом $q = 1мкКл$ удерживается на одной вертикали под закрепленным зарядом $q_0 = -4мкКл$ на расстоянии $r_0 = 0{,}8м$ от него. Определим минимальную скорость, направленную вниз, которую нужно сообщить частице, чтобы она достигла поверхности земли. Расстояние до поверхности земли велико, движение происходит в поле тяготения земли, ускорение свободного падения считаем постоянным.

Решение: заряд q_0 закреплен на высоте h_1, частица удерживается на высоте h_2 над землей $(h_1 - h_2 = r_0)$. В процессе движения частицы по вертикали на нее действуют две силы: тяжести и кулоновского притяжения к закрепленному над ней заряду q_0 – направленные противоположно.



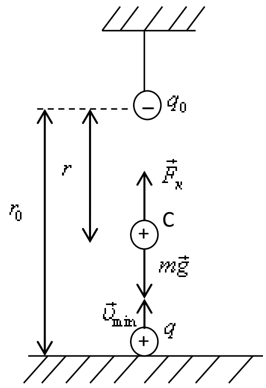
Как показывает расчет сила кулоновского притяжения больше силы тяжести. Чтобы частица достигла Земли, достаточно, чтобы она пролетела точку С, в которой эти две силы становятся равными и после этого равнодействующая этих сил будет направлена в сторону земли.



Определим положение точки С: $\frac{k|q_0|q}{r^2} = mg \Rightarrow r = \sqrt{\frac{k|q_0|q}{mg}} = 2м$. Силы тяжести и кулона потенциальные, поэтому для определения минимальной скорости, сообщаемой частице, чтобы она долетела до точки С, воспользуемся законом сохранения энергии: $mgh_2 - \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} - k\frac{|q_0|q}{r_0} = mg\left(h_1 - r\right) - k\frac{|q_0|q}{r}$ (1), где mgh_2 и $mg(h_1 - r)$ потенциальные энергии частицы в поле тяготения Земли в начальный момент времени и в точке С, $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}$ – минимальная кинетическая энергия, сообщаемая частице, чтобы она достигла точки С, а затем и поверхности земли; $-\frac{k|q_0|q}{r_0}$ и $-\frac{k|q_0|q}{r}$ – потенциальные энергии электрического взаимодействия положительно заряженной частицы с закрепленным отрицательным зарядом на расстояниях r_0 и r соответственно.

Преобразуем (1) к виду $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} = k\frac{|q_0|q}{rr_0}(r-r_0)+mg(h_1-h_2-r) = k\frac{|q_0|q}{rr_0}(r-r_0)-mg(r-r_0)$ и выразим $\upsilon_{\min}$: $\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{2k|q_0|q}{mrr_0}(r-r_0)-2g(r-r_0)}$. Подставив численные значения, получим $\upsilon_{\min} = 6\frac{м}{с}$.

Если заряженную частицу удерживать на расстоянии $r_0 = 6м$, то сила кулоновского притяжения будет меньше силы тяжести. В данном случае определим минимальную скорость, которую следует сообщить частице, чтобы она достигла закрепленного заряда.



Для достижения закрепленного заряда q_0 достаточно, чтобы частица попала в точку С, в которой силы тяжести и кулоновского притяжения становятся равными. Эта точка находится на расстоянии $r = 2м$ от закрепленного заряда. Чтобы определить минимальную скорость воспользуемся законом сохранения энергии: $\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2}k\frac{|q_0|q}{r_0} = mg(r_0-r)-k\frac{|q_0||q|}{r} \Rightarrow \upsilon_{\min}\sqrt{\frac{2k|q_0|q(r-r_0)}{mrr_0}+2g(r_0-r)} = 7,3\frac{м}{с}$.

Литература.

1.Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями.–М:КДУ,2005.–352с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы.–М.: «Дрофа»,2000.–672с.