Динамика движения материальной точки по окружности с постоянной по модулю скоростью.

Петров К.А., Развина Т.И., Чертина М.И.

В освоении школьного курса физики существенную роль играет умение решать задачи. И в настоящее время, когда альтернативы централизованному тестированию не предвидится, уже не важно, решаются ли эти задачи для тренинга, иллюстрации правил, формул и законов или преследуют такую важную цель обучения, как развитие творческих способностей учащихся. Умение систематизировать. Выделять общие закономерности и решать достаточно сложные задачи изящно и рационально приобретает большое значение. Авторы настоящей статьи предприняли попытку показать все вышесказанное на примере темы «Динамика вращательного движения тела».

При движении материальной точки по окружности радиусом R с линейной скоростью υ результирующая всех сил, действующих на точку, направлена к центру окружности и сообщает точке центростремительное ускорение $\vec{a}_{\text{ö}}$, равное $\text{à}_{\text{ö}} = \frac{\upsilon^2}{R}$.

Один из примеров вывода этого соотношения следующий. За малое время Δt радиус-вектор, соединяющий центр окружности с точкой на ней, поворачивается на угол $\Delta\varphi$, а точка перемещается по дуге, длина которой $\Delta l = R\Delta\varphi$. Скорость этого перемещения $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega(1)$, где $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$– угловая скорость точки. За это же время Δt вектор скорости $\vec{\upsilon}$ поворачивается на такой же угол $\Delta\varphi$, поскольку линейная скорость точки $\vec{\upsilon} \perp \vec{R}$. Изменение скорости $\Delta\upsilon = \upsilon\Delta\varphi$. Быстрота изменения вектора скорости определяется аналогично (1) и является искомым центростремительным ускорением: $a_{\text{ö}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \upsilon\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \upsilon\omega = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = (2\pi\nu)^2 R$, где T и ν– период и частота вращения точки.

При решении задач по данной теме необходимо установить силы, действующие на тело и вызывающие это движение, и, воспользовавшись вторым законом Ньютона, связать эти силы с кинематической характеристикой движения – центростремительным ускорением: $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{ö}}$.

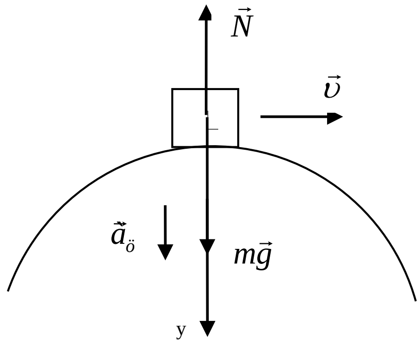
При рассмотрении сил, действующих на точку (тело), следует четко помнить их направления: сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально вниз; сила реакции опоры $\vec{N}$– перпендикулярна опоре; сила натяжения нити $\vec{F}_{\text{í}}$– вдоль оси подвеса, сила упругости $\vec{F}_{\text{óïð}}$– противоположно возникающей деформации; сила трения (сопротивления) $\vec{F}_{\text{òð}}\left(\vec{F}_{\text{ñ}}\right)$– противоположно направлению возможного движения.

Так как центростремительное ускорение $\vec{a}_{\text{ö}}$ всегда направлено к центру окружности, по которой происходит движение точки (тела), направление одной из осей выбирают вдоль направления ускорения, а вторую ось (если есть необходимость) направляют перпендикулярно ей. Далее рассматриваются проекции действующих сил на выбранные оси.

В статье представлена систематизация и алгоритм решения задач по данной теме.

1. Рассмотрим тело на выпуклой криволинейной поверхности с радиусом кривизны R.

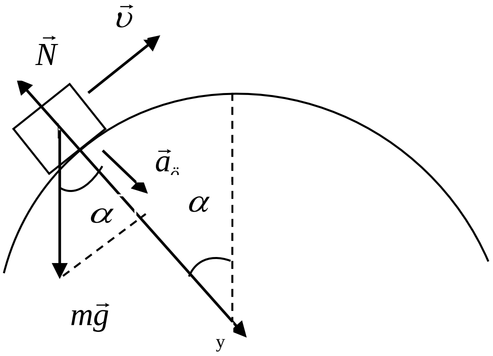
а) в верхней точке выпуклого моста



Второй закон Ньютона в проекции на ось Оу: $mg - N = ma_{ö}$

Сила давления $F_{Ä}$ тела на мост в верхней его точке согласно третьему закону Ньютона: $F_{Ä} = N = m(g - a_{ö})$

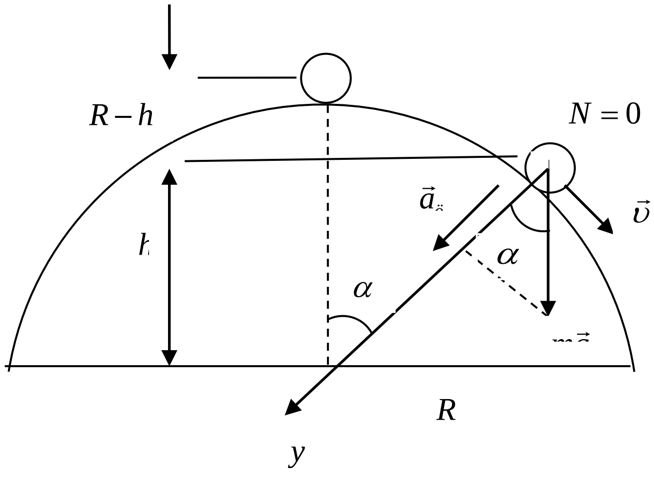
б) в произвольной точке выпуклого моста



Второй закон Ньютона в проекции на ось Оу: $mg\cos\alpha - N = ma_{ö}$

$F_{Ä} = N = m(g\cos\alpha - a_{ö})$

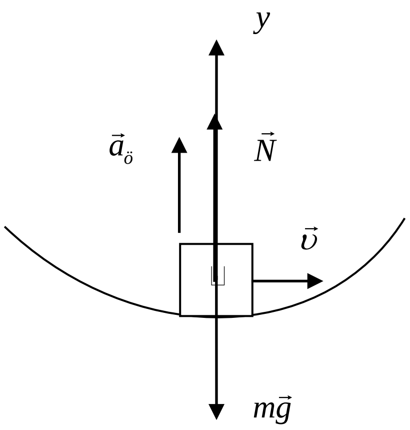
в) скатывание и отрыв тела от гладкой полусферы



Определим высоту h, с которой тело при скатывании отрывается от полусферы. В момент отрыва сила реакции становится равной нулю. Тогда проекции сил на ось Оу: $mg\cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R}(1)$, $\cos\alpha = \frac{h}{R}(2)$. Из закона сохранения энергии $mg(R-h) = \frac{m\upsilon^2}{2}$, определим $m\upsilon^2 = 2mg\left(R-h\right)(3)$. Тогда (1) с учетом (2) и (3) примет вид: $mg\dfrac{h}{R}=\dfrac{2mg(R-h)}{R}\Rightarrow h=\dfrac{2}{3}R$.

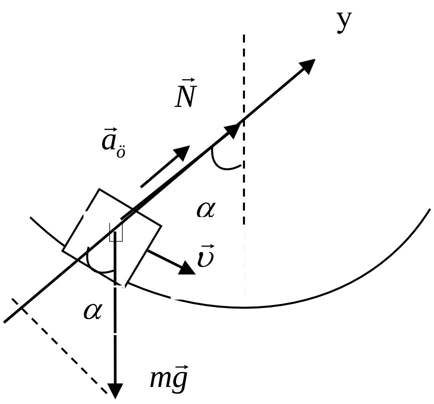
2. Рассмотрим тело на вогнутой криволинейной поверхности с радиусом кривизны R.

а) в нижней точке вогнутого моста



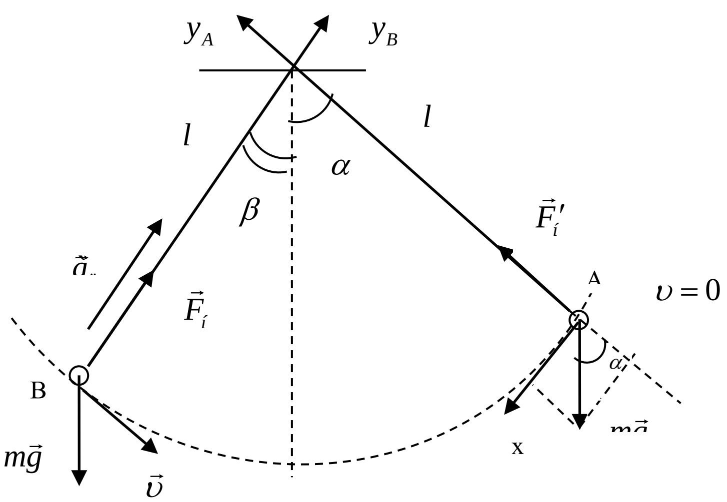
Второй закон Ньютона в проекции на ось Oy: $N-mg=ma_{ö}\Rightarrow F_{Ä}=N=m(g+a_{ö})$

б) в произвольной точке моста



Второй закон Ньютона в проекции на ось Oy: $N-mg\cos\alpha=ma_{ö}$; $F_{Ä}=N=m(g\cos\alpha+a_{ö})$

в) рассмотрим движение математического маятника



При максимальном смещении нити маятника от положения равновесия (угол α от вертикали) проекция сил на оси Ox и Oy:

Ox$_A$: $mg\sin\alpha=ma_\tau'$ (a_τ' – тангенциальное ускорение, $a_{ö}'=0$, т.к. $\upsilon=0$

Oy$_A$: $F_í'-mg\cos\alpha=0$

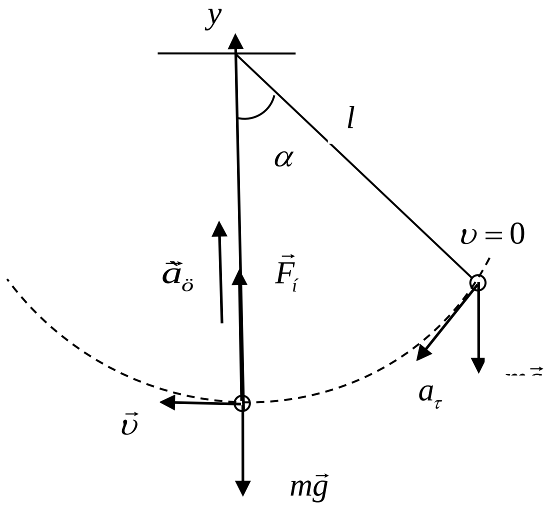
($F_í'$ – сила натяжения нити в этом положении)

В произвольном положении маятника (угол отклонения β меньше угла α)

Ox$_B$: $mg\sin\beta = ma_\tau$

Oy$_B$: $F_í - mg\cos\beta = ma_ö \Rightarrow F_í = m(a_ö + g\cos\beta)$

Ускорение точки в этом положении $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_ö^2}$

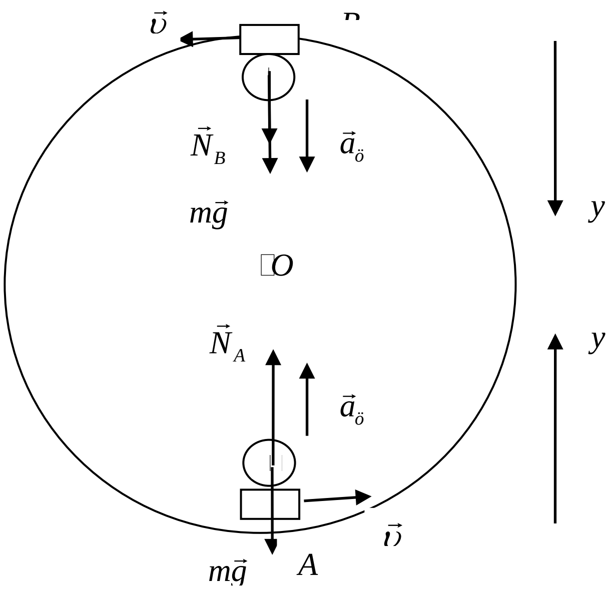


Примечание: определим силу натяжения нити в нижнем положении тела при условии, что ускорения в крайнем и нижнем положениях тела равны: $a_\tau = a_ö\,(a_\tau = g\sin\alpha)$

Запишем проекцию сил на ось Оу: $F_í - mg = mg\sin\alpha \Rightarrow F_í = mg\left(1+\sin\alpha\right)$.

3. Движение тела по окружности в вертикальной плоскости

а) рассмотрим самолет, совершающий «мертвую петлю» (петля Нестерова)



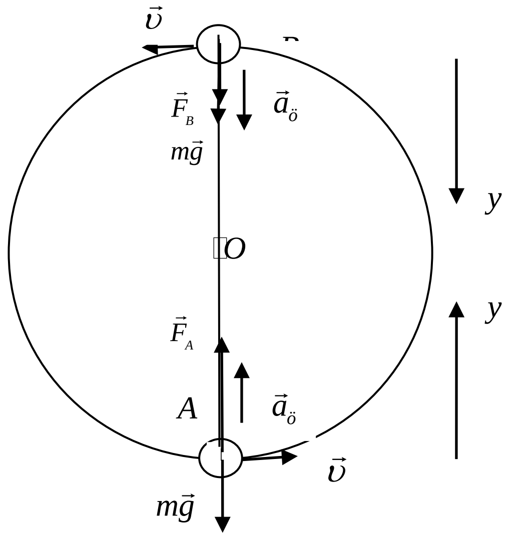
Для тела в положении А, проекция сил на ось Оу: $N_A - mg = ma_ö\,(1)$

Для тела в положении В, проекция сил на ось Оу: $N_B + mg = ma_ö\,(2)$

Разность сил, действующих на летчика со стороны сидения, находим из (1) и (2): $\Delta N = N_A - N_B = 2mg$. Силы отличаются: $\dfrac{N_A}{N_B} = \dfrac{a_ö + g}{a_ö - g}$.

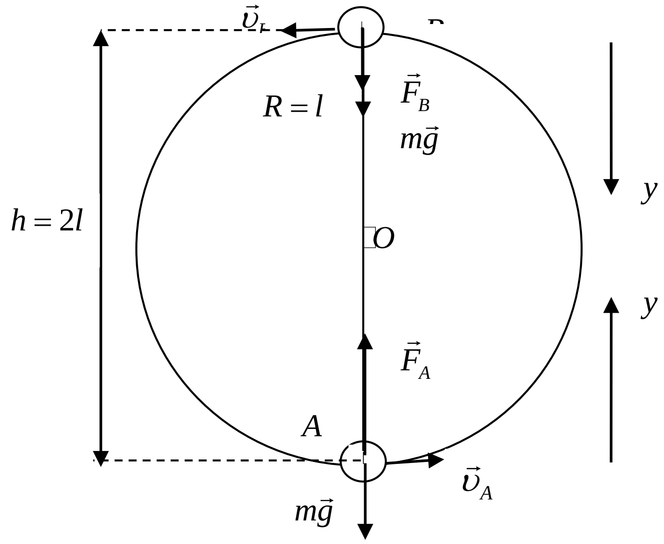
б) рассмотрим вращение шарика на нити с постоянной по модулю скоростью в вертикальной плоскости

Ситуация идентична предыдущей. Силы натяжения $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$, действующие на тело в положении А и В со стороны нити, равны: $F_A = m(a_ö + g)$,



$F_B = m(a_{\ddot{o}} - g)$.Сила $\vec{F}_A$ больше силы $\vec{F}_B$ на величину $2mg$. Их отношение $\frac{F_A}{F_B} = \frac{a_{\ddot{o}} + g}{a_{\ddot{o}} - g}$.

в) свободное вращение шарика на нити в вертикальной плоскости



Проекции сил на ось Оу для положения А: $F_A - mg = \frac{m\upsilon_A^2}{R}(1)$,

Проекции сил на ось Оу для положения В: $F_B + mg = \frac{m\upsilon_B^2}{R}(2)$

Разность сил натяжения в положениях А и В

$$\Delta F = F_A - F_B = 2mg + \frac{m\upsilon_A^2}{R} - \frac{m\upsilon_B^2}{R}(3)$$

Из закона сохранения механической энергии

$$\frac{m\upsilon_A^2}{2} = \frac{m\upsilon_B^2}{2} + mg2l \Rightarrow m\upsilon_A^2 - m\upsilon_B^2 = 4mgl(4)$$

С учетом (4) выражение (3) примет вид:

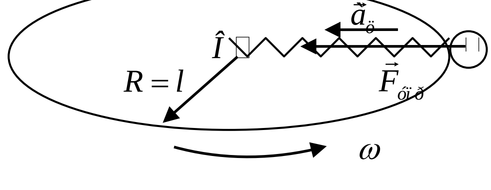
$$\Delta F = 2mg + 4mg = 6mg .$$

При определении минимальной скорости $\upsilon_{A\min}$, сообщаемой телу в положении А, чтобы оно совершило полный оборот, следует считать, что в положении В сила натяжения F_B будет отсутствовать. Тогда равенство (2) будет иметь вид: $mg = \frac{m\upsilon_B^2}{l} \Rightarrow m\upsilon_B^2 = mgl(2')$. Перепишем выражение (4) в виде:

$$m\upsilon_{A\min}^2 - mgl = 4mgl \Rightarrow \upsilon_{A\min} = \sqrt{5gl} .$$

4. Движение тела по окружности в горизонтальной плоскости

а) тело, закрепленное на невесомой пружине жесткостью k, вращается на гладкой горизонтальной поверхности.

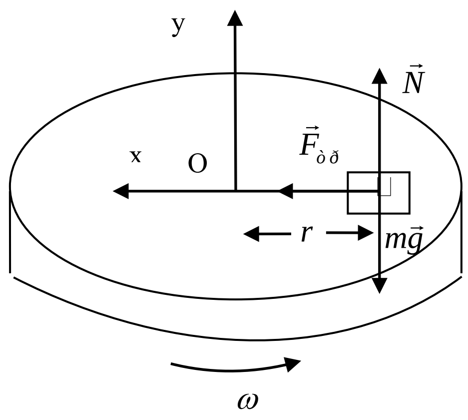


Сила упругости $F_{\text{óïð}} = k\Delta l(1)$,

$F_{\text{óïð}} = ma_{\ddot{o}} = m\omega^2 l(2)$. Длина растянутой пружины l равна $l = l_0 + \Delta l$, где l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии;

Δl – удлинение пружины, ω – угловая скорость вращения тела. Объединив (1) и (2), получим: $k\Delta l = m\omega^2(l_0 + \Delta l)$. Из этого выражения определяются различные параметры, в частности, удлинение пружины $\Delta l = \dfrac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$; угловая скорость вращения тела $\omega = \sqrt{\dfrac{k\Delta l}{m(l_0 + \Delta l)}}$.

б) тело на вращающемся диске (коэффициент трения тела о диск μ, угловая скорость вращения диска постоянна и равна ω)



Запишем проекции сил на выбранные оси.

Ох: $F_{\text{òð}} = ma_{\text{ö}}$ (1)

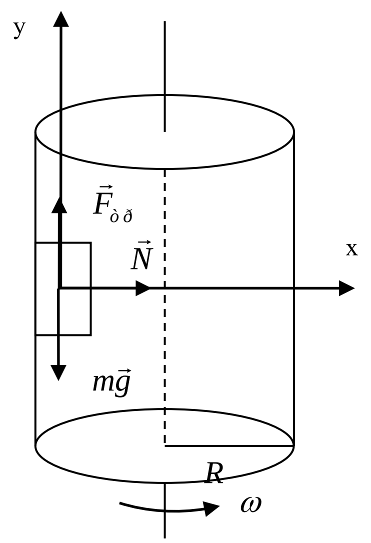
Оу: $N - mg = 0$ (2)

$F_{\text{òð}} = \mu N$ (3)

С учетом (3) и (2) запишем выражение (1) в виде $\mu mg = ma_{\text{ö}} \Rightarrow \mu g = a_{\text{ö}}$.

При заданной угловой скорости ω вращения диска легко определить положение тела относительно оси вращения диска: $\mu g = \omega^2 r \Rightarrow r = \dfrac{\mu g}{\omega^2}$.

в) тела на вертикальной стене (коэффициент трения тела о стену μ)



Запишем проекции сил на выбранные оси.

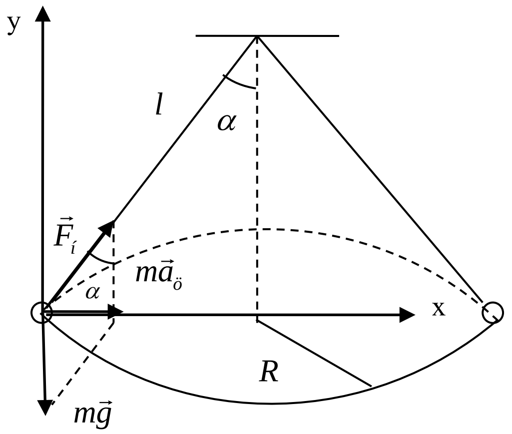
Ох: $N = ma_{\text{ö}}$

Оу: $F_{\text{òð}} - mg = 0$

С учетом того, что $F_{\text{òð}} = \mu N$ можно записать:

$\mu ma_{\text{ö}} = mg$ или $\mu\omega^2 R = g$. Отсюда $\mu = \dfrac{g}{\omega^2 R}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$.

г) конический маятник



Запишем проекции сил на выбранные оси.

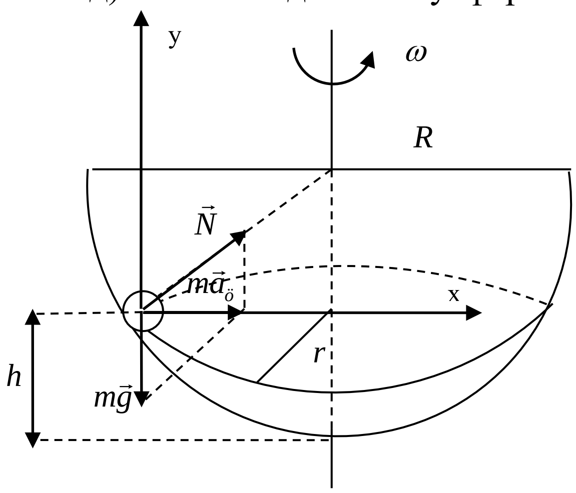
Ох: $F_í \sin\alpha = ma_ö (1)$

Оу: $F_í \cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow F_í \cos\alpha = mg (2)$

Поделив (1) на (2), получим
$tg\alpha = \dfrac{a_ö}{g} = \dfrac{\omega^2 R}{g} = \dfrac{\omega^2 l \sin\alpha}{g}$.

Угловая скорость $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$, период вращения $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}$. При заданном радиусе R, описываемой телом окружности, сила натяжения равна
$F_í = \sqrt{(mg)^2 + (ma_ö)^2} = m\sqrt{g^2 + (\omega^2 R)^2}$.

д) тело в гладкой полусферической чаше.



По аналогии с коническим маятником рассматриваем проекции сил на выбранные оси.

Ох: $N\sin\alpha = ma_ö$

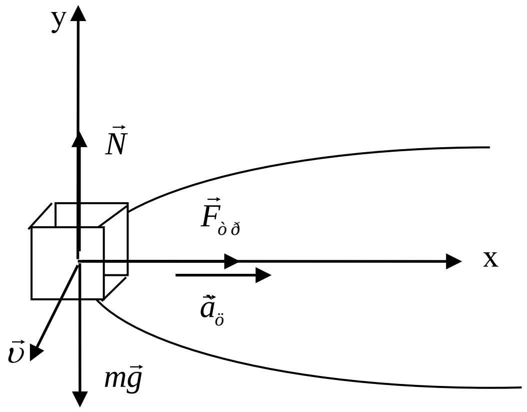
Оу: $N\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow N\cos\alpha = mg$

$tg\alpha = \dfrac{a_ö}{g} = \dfrac{\omega^2 r}{g} = \dfrac{\omega^2 R\sin\alpha}{g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{R\cos\alpha}}$.

Высота h, на которую поднимается тело во вращающейся чаше, равна $h = R(1-\cos\alpha) = R\left(1 - \dfrac{g}{\omega^2 R}\right)$

5. Повороты

а) автомобиль на повороте



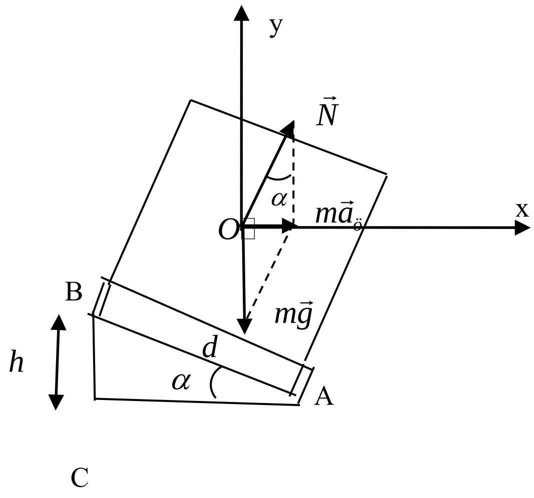
Запишем проекции сил на выбранные оси.

$$\left.\begin{aligned} Ox &: F_{òð} = ma_ö \\ Oy &: N - mg = 0 \\ F_{òð} &= \mu N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu g = a_ö .$$

$\mu g = \dfrac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\mu g R}$.

При превышении скорости υ автомобиль не впишется в траекторию поворота и его «занесет».

Особый случай представляет задача на движение поезда (трамвая) по закругленным участкам. Для устранения бокового давления со стороны колес на рельсы, наружный рельс укладывают выше внутреннего. Высота возвышения h рельса, радиус кривизны R участка, скорость υ поезда и ширина колеи d связаны соотношением, которое определим следующим образом.



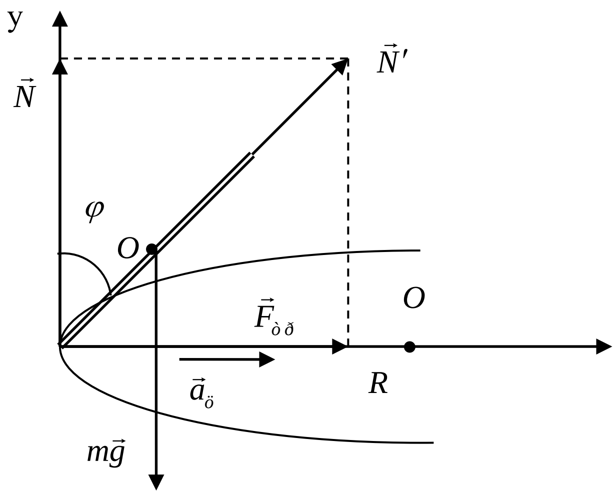
Из треугольника ABC $\sin\alpha = \dfrac{h}{d}$.

Из проекций сил на оси
$$\left.\begin{aligned} N\sin\alpha &= ma_{ö} \\ N\cos\alpha &= mg \end{aligned}\right\} tg\alpha = \frac{a_{ö}}{g} = \frac{\upsilon^2}{Rg}.$$

Учитывая малость угла α: $\sin\alpha \approx tg\alpha$.

Тогда $\dfrac{h}{d} = \dfrac{\upsilon^2}{Rg} \Rightarrow h = \dfrac{\upsilon^2 d}{Rg}$.

б) мотоциклист (велосипедист) на вираже

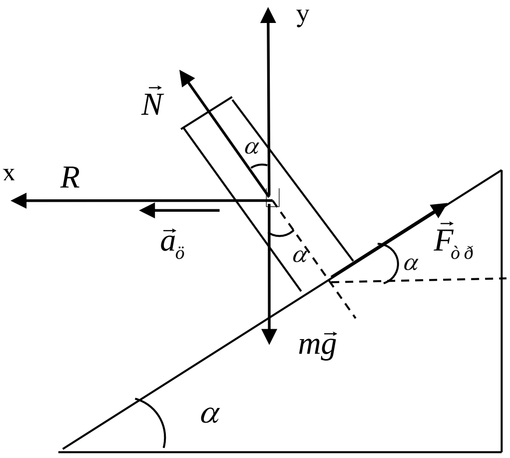


Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к центру тяжести тела, сила реакции опоры $\vec{N}$ – перпендикулярна опоре. Результирующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{òð}$ должна проходить через центр тяжести, в противном случае возникнет вращающий момент силы $\vec{N}'$, который повернет тело либо к горизонту, либо выбросит тело за пределы виража. Для определения угла отклонения φ тела от вертикали, воспользуемся тригонометрическим соотношением $tg\varphi = \dfrac{F_{òð}}{N} = \mu$.

Определим силу взаимодействия движущегося тела с горизонтальной плоскостью. Эта сила $\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_{òð}$. Её величина $F = \sqrt{N^2 + F^2_{òð}} = N\sqrt{1+\mu^2}$.

6. Велосипедист на наклонном треке

а) определение минимальной скорости $\upsilon_{\min}$ при движении велосипедиста (угол наклона плоскости к горизонту α, коэффициент трения о трек μ, радиус трека R).



Сила трения должна препятствовать скольжению тела вниз. Запишем II закон Ньютона в проекциях на оси.

Ox: $N\sin\alpha - F_{\text{òð}}\cos\alpha = ma_{\text{ö}}$ (1)

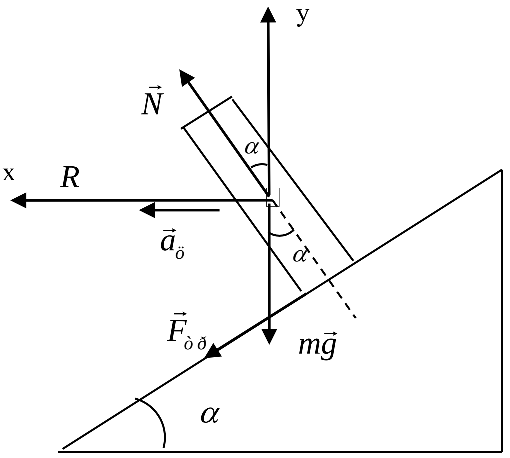
Oy: $N\cos\alpha + F_{\text{òð}}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$

$N\cos\alpha + F_{\text{òð}}\sin\alpha = mg$ (2)

С учетом $F_{\text{òð}} = \mu N$, делим (1) на (2): $\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \dfrac{a_{\text{ö}}}{g} = \dfrac{\upsilon_{\min}^2}{Rg} \Rightarrow$

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{Rg\frac{tg\alpha - \mu}{1 + \mu tg\alpha}}.$$

б) определение максимальной скорости $\upsilon_{\max}$ при движении велосипедиста



В данной ситуации сила трения $F_{\text{òð}}$ должна быть максимальной ($F_{\text{òð}\max} = \mu N$) и препятствовать движению велосипедиста к верхнему краю велотрека. Тогда аналогично случаю (а), проекции сил на оси:

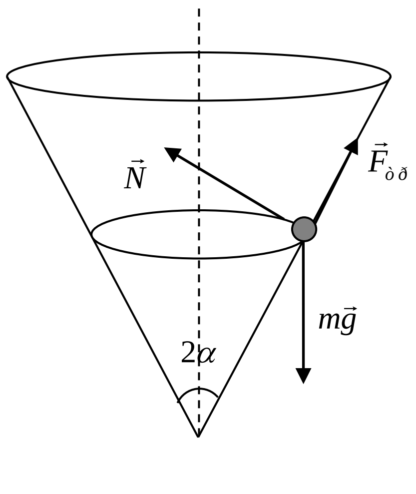
Ox: $N\sin\alpha + F_{\text{òð}}\cos\alpha = ma_{\text{ö}}$

Oy: $N\cos\alpha - F_{\text{òð}}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$

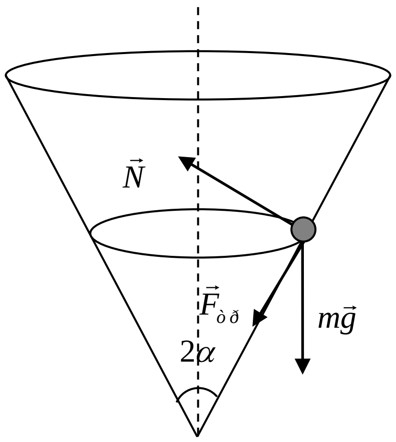
$N\cos\alpha - F_{\text{òð}}\sin\alpha = mg$.

$$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{\upsilon_{\max}^2}{Rg} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{Rg\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha}}.$$

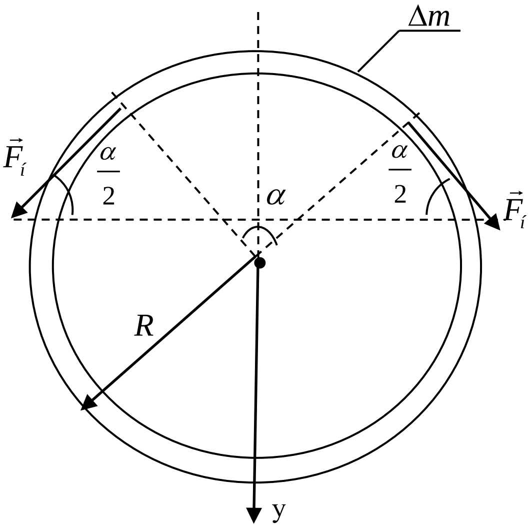
Примечание. Аналогично случаям (а) и (б) рассматриваются следующие задачи. По внутренней поверхности конуса с углом при вершине 2α с постоянной угловой скоростью ω вращается шарик массой m, описывая окружность в горизонтальной плоскости. Коэффициент трения шарика о поверхность конуса μ. Для того чтобы шарик не спустился вниз конуса, сила трения должна быть направлена вверх подобно случаю 6а.



Для того чтобы шарик не вылетел из конуса, сила трения должна быть направлена вниз, подобно случаю 6б.

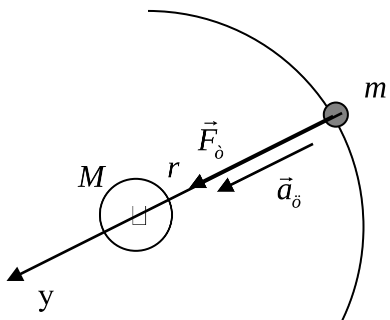


7.Кольцо (резиновое, металлическое), замкнутая цепочка из металлических звеньев длиной l раскручиваются и вращаются в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (или линейной скоростью υ).



Сила натяжения в кольце определяется следующим образом. Выделим малый элемент кольца массой Δm таким образом, что $\alpha \to 0$. Результирующая сил натяжения, возникающих в кольце в проекции на ось Оу: $2F_н \sin\frac{\alpha}{2} = \Delta m a_ц (1)$. Центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 R$, элемент массы $\Delta m = \frac{m\alpha}{2\pi}$, $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $l = 2\pi R$. Из (1) сила натяжения $F_н = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}$ или $F_н = \frac{m\upsilon^2}{2\pi R} = \frac{m\upsilon^2}{l}$.

8. Движение спутников вокруг планет.



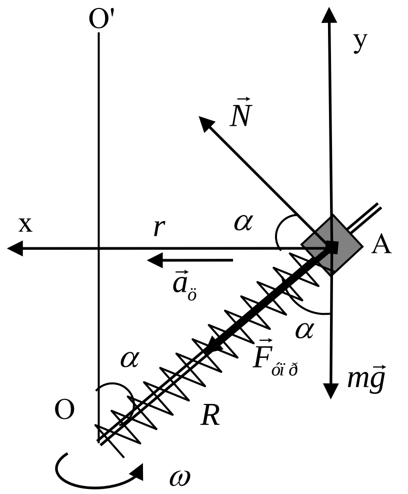
На движущийся по орбите вокруг планеты (M) спутник (m) действует только сила всемирного тяготения $F_т$, сообщающая спутнику центростремительное ускорение: $G\frac{Mm}{r^2} = ma_ц$ или $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} (1)$ (r – расстояние между центрами планеты и спутника).

Если учесть, что вблизи планеты ускорение свободного падения $g_{пл} = G\frac{M}{R_{пл}{}^2}$, то из (1) скорость спутника $\upsilon = \sqrt{\dfrac{g_{\text{ïë}} R_{\text{ïë}}^2}{r}}$, где $R_{\text{ïë}}$ – радиус планеты.

Если точка (тело) находится на экваторе планеты, то расстояние $r = R_{\text{ïë}}$ и линейная скорость точки на планете $\upsilon = \sqrt{gR_{\text{ïë}}}$, угловая скорость $\omega = \dfrac{\upsilon}{R_{\text{ïë}}} = \sqrt{\dfrac{g}{R_{\text{ïë}}}}$, период обращения $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_{\text{ïë}}}{g}}$.

9. Вращение тела на стержне.

а) Стержень ОА жестко крепится под углом α к оси ОО', вращающейся с угловой скоростью ω. По стержню скользит без трения муфта массой m, соединенная с точкой О невесомой пружиной жесткостью k, длина которой в недеформированном состоянии l_0. Определить длину пружины при вращении.



Ситуация похожа на задачу, которая была рассмотрена в п.6б, только вместо силы трения, в нашем случае возникает сила упругости $F_{\text{óïð}} = k\Delta l = k\left(l - l_0\right)$.

Запишем проекции сил на выбранные оси. Ох: $N\cos\alpha + k\Delta l\sin\alpha = m\omega^2 r(1)$, где $r = l\sin\alpha$ – радиус окружности по которой вращается муфта, $\Delta l = l - l_0$ – удлинение пружины.

Оу: $N\sin\alpha - k\Delta l\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow$

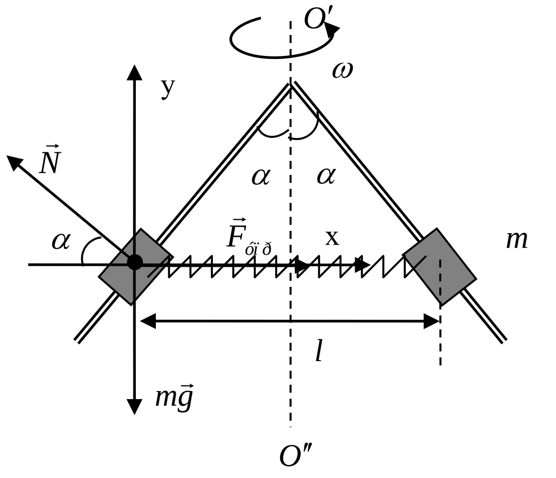
$N\sin\alpha - k\Delta l\cos\alpha = mg(2)$

Помножим (1) на $\sin\alpha$, (2) на $\cos\alpha$ и вычтем почленно: $k\Delta l\sin^2\alpha + k\Delta l\cos^2\alpha = m\omega^2 l\sin^2\alpha - mg\cos\alpha \Rightarrow$

$$l = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}(3).$$

Как видно из (3), k должно быть больше $m\omega^2\sin^2\alpha$ ($k > m\omega^2\sin^2\alpha$) или $\omega < \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Если $k = m\omega^2\sin^2\alpha$, то $l \Rightarrow \infty$, пока пружина не разорвется. Удлинение пружины должно быть больше 0($l - l_0$>0), тогда $\omega > \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{l}}$. Если это условие не выполняется, то пружина практически не будет растягиваться, так как сила упругости полностью будет компенсироваться составляющей силы тяжести вдоль стержня $\left(mg\cos\alpha\right)$.

б) На две штанги, расположенные симметрично оси О'О", надеты муфты массой m каждая, соединенные невесомой пружиной жесткостью k и расположенные на одной высоте. Длина пружины в недеформированном состоянии l_0. Система вращается вокруг оси с угловой скоростью ω.



Запишем проекции сил на выбранные оси для одной из муфт.

Ox: $k(l-l_0)-N\cos\alpha = m\omega^2\frac{l_0+\Delta l}{2}(1)$

Oy: $mg - N\sin\alpha = 0(2)$

Умножив (1) на $\sin\alpha$, (2) на $\cos\alpha$, вычтем из одного второе и, исключив N, получаем $k(l-l_0)\sin\alpha - mg\cos\alpha = m\omega^2\frac{l_0+l}{2}$.

Из данного соотношения можно получить любой параметр.

Литература.

1.Черноуцан А. И. Физика. Задачи с ответами и решениями.–М : КДУ, 2005. – 35 2с.

2. Физика:3800 задач для школьников и поступающих в вузы. – М. : «Дрофа», 2000.–672 с.